Komplexes Training

1. Überprüfe, ob gilt:

   a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

   b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

   c) $|\, z_1 \cdot z_2 \,| = |\, z_1 \,| \cdot |\, z_2 \,|$

   d) $|\, z \,|^n = |\, z^n \,|\,, \quad n \in \mathbb{N}$

   e) $|\, z \,| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

2. Beweise den Satz:
   Falls z_0 eine Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten ist, so ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle.

3. Bringe die Ausdrücke in die Normalform $z = x + iy$.

   a) $\dfrac{2-3i}{3+4i}$ b) $\dfrac{4-8i}{3+2i}$ c) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\right)^{10}$

4. Bringe die Ausdrücke in die Polarform.

   a) $-5 - 12i$ b) $7 - \sqrt{13}\, i$ c) $-3 + \sqrt{27}\, i$

5. Wo liegen in der komplexen Ebene alle Zahlen, die die Bedingung erfüllen:

   a) $|\, z \,| = 3$ b) $|\, z - 1 \,| = 3$ c) $|\, z + 4 \,| < 3$

6. Löse in $\mathbb{C}$:

   a) $z^2 - 6z + 11 = 0$ b) $z^2 + (-1+i)z - i = 0$

   Fundamentalsatz der Algebra, Carl Friedrich Gauß, 1799
   Ein Polynom (Grad $\neq 0$) mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

7. Was lässt sich hinsichtlich der Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren folgern?

8. Löse die Klammern von $(z - z_0)(z - \overline{z_0}\,)$ auf.
   Welche Aussage ist über dieses Polynom möglich?
   Was lässt sich nun über die Zerlegung von Polynomen mit reellen Koeffizienten aussagen?

9. Bilde das Dreieck $A(2+i)$, $B(1+3i)$, $C(0)$ ab:

   a) $f(z) = \overline{z}$

   b) $f(z) = z + (5 - 6i)$

   c) $f(z) = (\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i) \cdot z$

10. $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ ist eine Parameterdarstellung eines Kreises um den Ursprung $(0 \leq \varphi \leq 360°)$. Beschreibe die Abbildung dieses Kreises mit $r = 2$ durch $f(z) = z^2$.

11. Wie müsste die Multiplikation in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definiert werden, damit die Gleichung $x^2 = 5$ lösbar wäre. Wie lautete dann die Lösung? Mache auch eine Probe.