Komplexe Zahlen Einführung

Im 16.Jh. fanden *Tartaglia* und von ihm unabhängig *del Ferro* eine Lösungsformel für Gleichungen 3. Grades: $x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$.

Durch Einsetzen von $x = y - \frac{b}{3}$ kann sie auf die Form

$$y^3 - 3p\,y - 2q = 0$$

gebracht werden. Der Ansatz $y = u + v$ führt nach trickreicher Rechnung zu der Formel:

$$y_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Hierbei muss für eine reelle Lösung $q^2 - p^3 \geq 0$ vorausgesetzt werden.

Etwa 30 Jahre nach Bekanntwerden der Formel erkannte Bombelli, dass sie etwas Befremdliches an sich hatte. Über eine für ihn sinnlose Rechnung im Falle $q^2 - p^3 < 0$ gelangte er zu einem richtigen Ergebnis.

Dies sei am Beispiel $y^3 - 15\,y - 4 = 0$ gezeigt.

Die Formel ergäbe: $y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$

Nun ist $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ und $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$, falls wir nach den gewohnten Rechenregeln rechnen, damit erhalten wir:

$y = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ und $y = 4$ ist tatsächlich eine Lösung, wie man unmittelbar nachprüft.

Es dauerte 2 Jahrhunderte, bis sich herausstellte, dass das kein Zufall ist und die komplexen Zahlen aus ihrem Dornröschenschlaf erwachten. Anfangs wurden sie mit Misstrauen und Verwirrung betrachtet. Noch im Jahre 1702 beschrieb Leibniz i, die Wurzel aus -1, als „jene Amphibie zwischen Sein und Nichtsein“. Er kannte die Beziehung $\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}$.

Von den Ergebnissen der tiefsinnigen Theorien, die auf den komplexen Zahlen basieren, seien nur zwei genannt:

die Eulersche Formel: $e^{iz} = \cos z + i\,\sin z$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$

Falls für die Lösung eines mathematischen Problems nur die natürlichen Zahlen infrage kommen, so ist es doch im allgemeinen recht nützlich, im Bereich der reellen Zahlen zu rechnen und sich anschließend unter den reellen Lösungen die in $\mathbb{N}$ liegenden herauszusuchen.
Viele Probleme, für deren Lösung nur reelle Zahlen infrage kommen, können entsprechend gelöst werden, indem man vorübergehend in den umfassenderen Bereich der komplexen Zahlen aufsteigt und die dort entwickelten Methoden - z. B. komplexe Differentiation und Integration - anwendet.
So kann die obige Gleichung 3. Grades auch als Gleichung in den komplexen Zahlen aufgefasst werden. Die Lösungsformel liefert dann in jedem Fall eine Lösung, die in einigen Fällen auch reell sein kann.
Mit komplexen Zahlen werden unter anderem Wechselströme beschrieben, Differentialgleichungen gelöst und Sätze über Grenzverteilungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bewiesen.

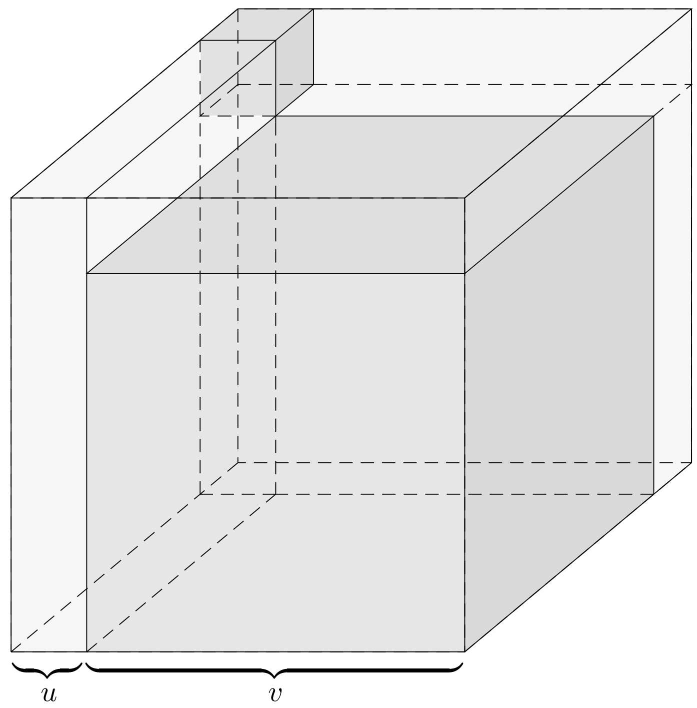
Die Gleichung $\quad x^3 + px + q = 0$

In einem Buch von Cardano (1545) ist eine geometrische Begründung für

$$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + (u^3+v^3)$$

enthalten.

Erläutere sie.



Mit dieser Beziehung wurde eine Lösungsformel für die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ gefunden.
Die Lösung x wird als Summe geschrieben: $x = u + v$.
Für u und v muss dann gelten:

$$\begin{aligned} 3uv &= -p \\ u^3 + v^3 &= -q \end{aligned}$$

Zunächst können u^3 und v^3 bestimmt werden, da sowohl ihre Summe $(= -q)$ als auch ihr Produkt $(= -(\frac{p}{3})^3)$ bekannt sind, und zwar als Lösungen der quadratischen Gleichung

$$y^2 + qy - (\frac{p}{3})^3 = 0$$

Alles zusammengefügt ergibt die sogenannte Cardanische Formel. Cardano hatte sie von Tartaglia mit dem Versprechen erhalten, sie geheim zu halten. Er wurde jedoch wortbrüchig.

$$x \; = \; \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} \; + \; \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$$

Komplexe Zahlen
Startseite