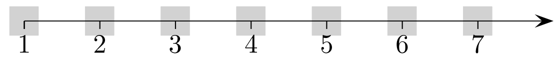
Zahlbereiche

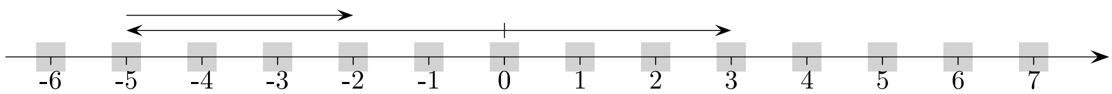
Wir beginnen mit der Zeit, in der wir noch ein ungetrübtes Verhältnis zur Mathematik hatten, also dem 1. Schuljahr.

$\mathbb{N}$



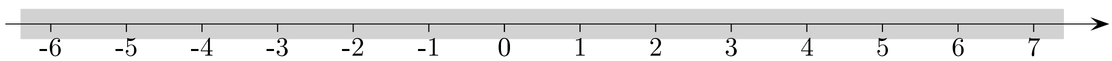
In den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist die Addition und Multiplikation uneingeschränkt möglich, Subtraktion und Division nur eingeschränkt. Wir haben noch keine Schulden.

$\mathbb{Z}$



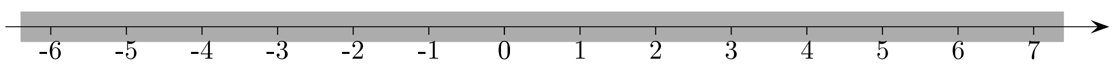
In den ganzen Zahlen führt auch die Subtraktion nicht aus $\mathbb{Z}$ heraus.
Das Rechnen kann mit Pfeilen veranschaulicht werden. Die Division ist nur mit Teilern möglich.

$\mathbb{Q}$



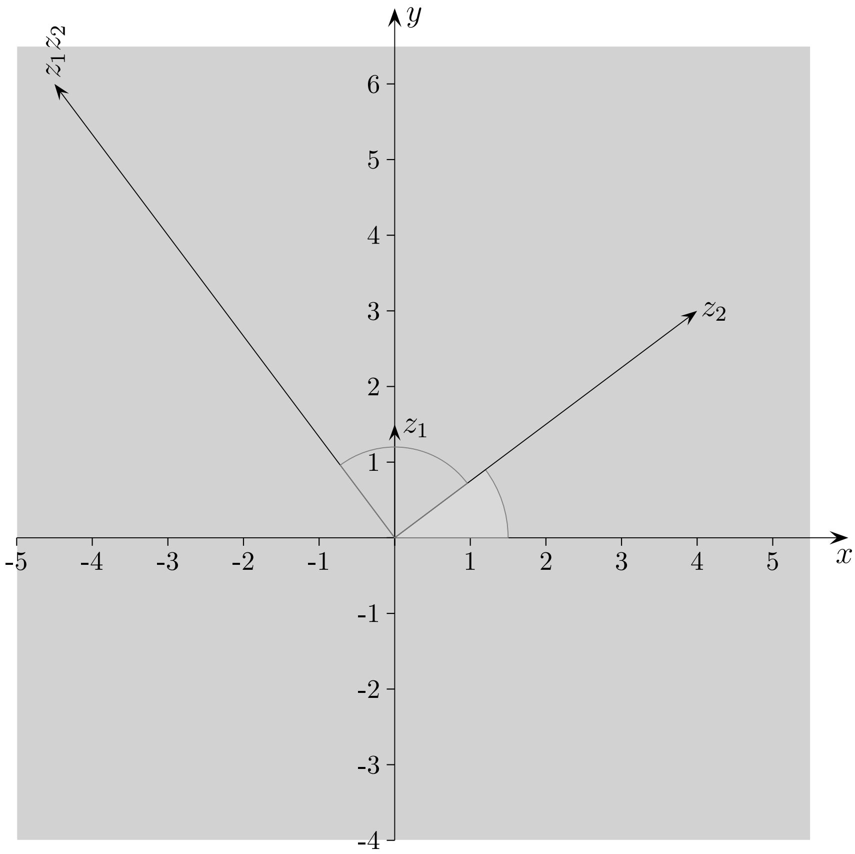
In den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (Brüche) sind alle Operationen uneingeschränkt möglich.
Wir stellen uns vor, bei $\frac{a}{b}$ auf die Division $a : b$ zu verzichten, was z. B. bei $\frac{2}{3}$ auch sinnvoll ist.

$\mathbb{R}$



Zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gehören neben den rationalen auch alle irrationalen Zahlen wie z. B. $\sqrt{2}$, π, e. Mit ihnen können theoretisch exakte Berechnungen, z. B. Diagonallängen von Rechtecken, durchgeführt werden. Dezimalzahlen mit z. B. 5 Stellen hinter dem Komma sind jedoch rational.

$\mathbb{C}$



Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ stellen wir uns als Punkte in der Ebene vor oder als Pfeile (Zeiger), die im Ursprung beginnen und damit eindeutig jeweils einen Punkt festlegen.
Die Addition kennen wir aus der Vektorrechnung. Wie wird nun in $\mathbb{C}$ multipliziert?

Beachte: Die Multiplikation in $\mathbb{R}$ kann als Drehstreckung aufgefasst werden. (Wie das?)
Die hierbei auftretenden, mit der positiven x-Achse eingeschlossenen Winkel sind entweder $0°$ oder $180°$ groß. Die Multiplikation in $\mathbb{C}$ ist auch eine Drehstreckung.
Die Beträge werden multipliziert, die Winkel (zur positiven x-Achse) addiert.
Alle Rechenregeln bleiben erhalten.

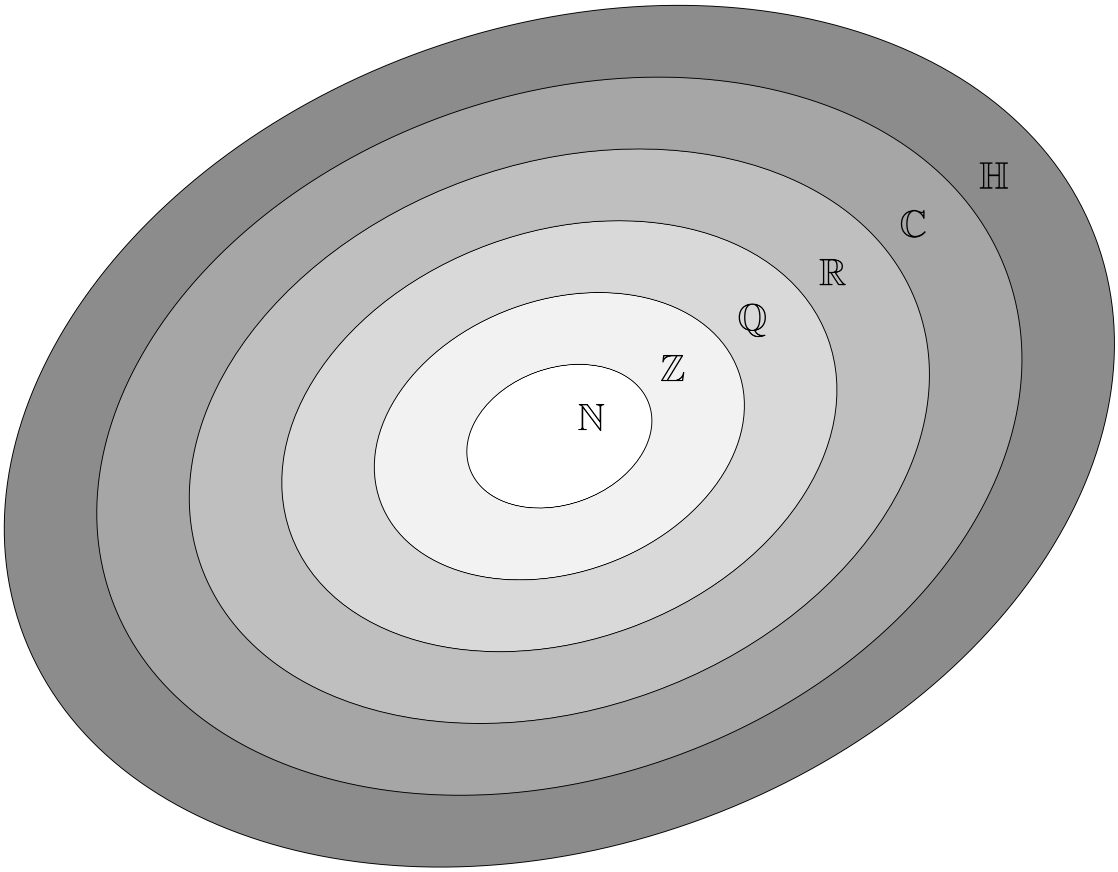
Für $i = (0, 1)$ gilt dann $i^2 = (-1, 0) = -1$ (Schreibweise vereinfacht) oder $i = \sqrt{-1}$.

$\mathbb{C}$ umfasst $\mathbb{R}$.
Die Elemente aus $\mathbb{C}$ können durch (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$ oder durch $a + bi$ erfasst werden.

Eine Erweiterung auf den $\mathbb{R}^3$ (Punkte im Raum) ist nach Frobenius 1877 nicht möglich, jedoch auf den $\mathbb{R}^4$, Hamilton 1843. Die Multiplikation ist auf diesen sogenannten Quaternionen $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ allerdings nicht mehr kommutativ. Sie werden in Computeranimationen für Drehungen im Raum verwendet. Eine Quaternion vom Betrag 1 enthält sowohl einen Achsenvektor als auch einen Drehwinkel. Für die Hintereinanderausführung von Drehungen um verschiedene Achsen müssen die Quaternionen lediglich multipliziert werden.

Die nächste Erweiterung ist ein algebraischer Bereich von 8-Tupeln (Quaternionenpaaren) von Cayley, 1845. Die Multiplikation ist weder kommutativ noch assoziativ.
Auch für diese Cayley-Algebra gibt es technische Anwendungen.

Zahlbereiche



Quaternionenschiefkörper ℍ

Zahlen

Die Zahl 3 (z. B.) existiert nur in unserem Geist, in unserer Umgebung finden wir
3 Hühner, 3 Tische usw., die Zahl 3 suchen wir hier vergebens.
In Gedanken können wir uns auch unendlich viele Zahlen vorstellen.
Wir können vielfältige Zahlbereiche konstruieren und erwarten lediglich, dass sie zu keinen Widersprüchen führen.