Einheitswurzeln

Besonderes Interesse verdient die Gleichung

$$z^n = 1$$

Mit $z = r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$ ergibt sich:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)]^n = 1$$

und mit der *Formel von Moivre*:

$$z^n = r^n\,[\cos(n\ \varphi) + i\ \sin(n\ \varphi)] = 1$$

Für die 1 lauten die Polarformen:

$$1 = 1 \cdot [\cos(k \cdot 360°) + i\ \sin(k \cdot 360°)] \quad ,\ k = 0,\ 1, ...$$

Durch Vergleich erhalten wir:

$$r = 1$$

$$n\ \varphi = k \cdot 360° \quad k = 0,\ 1, ...$$

Damit ergeben sich n verschiedene Lösungen:

$$z_k = \cos\left(k \cdot \frac{360°}{n}\right) + i\ \sin\left(k \cdot \frac{360°}{n}\right) \qquad ,\ k = 0,\ 1, ... ,\ n-1$$

Beispiel: $z^6 = 1$

$z_0 = \cos 0° + i\ \sin 0° = 1$

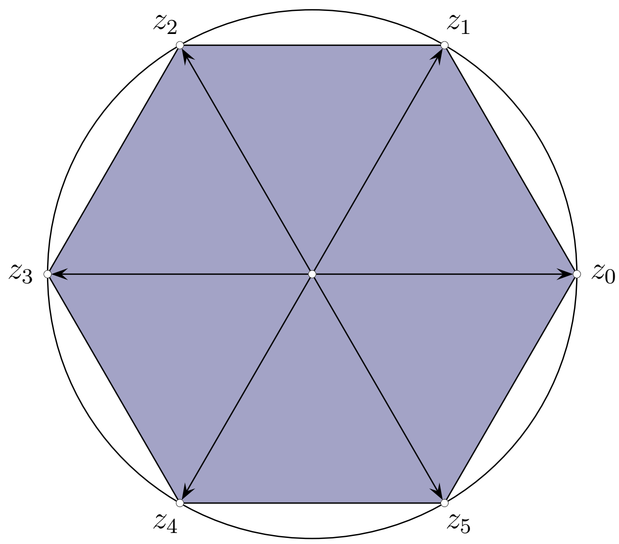
$z_1 = \cos 60° + i\ \sin 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

$z_2 = \cos 120° + i\ \sin 120° = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

$z_3 = \cos 180° + i\ \sin 180° = -1$

$z_4 = \cos 240° + i\ \sin 240° = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

$z_5 = \cos 300° + i\ \sin 300° = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$



Satz von Gauß (1796)
Ein regelmäßiges n-Eck kann genau dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn die Primfaktorzerlegung von n die Form hat:

$$n = 2^k p_1 p_2 \dots p_s$$

Die Zweierpotenz darf beliebig sein; die Primzahlen müssen sämtlich voneinander verschieden sein und außerdem von der Art sein, daß $p-1$ eine Zweierpotenz ist.
Die Zahlen n unterhalb 50, für welche die Konstruktion durchführbar ist, lauten: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48.