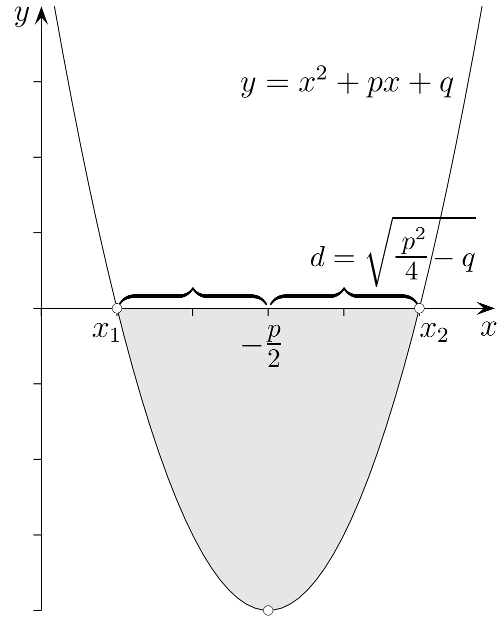
pq-Formel anschaulich



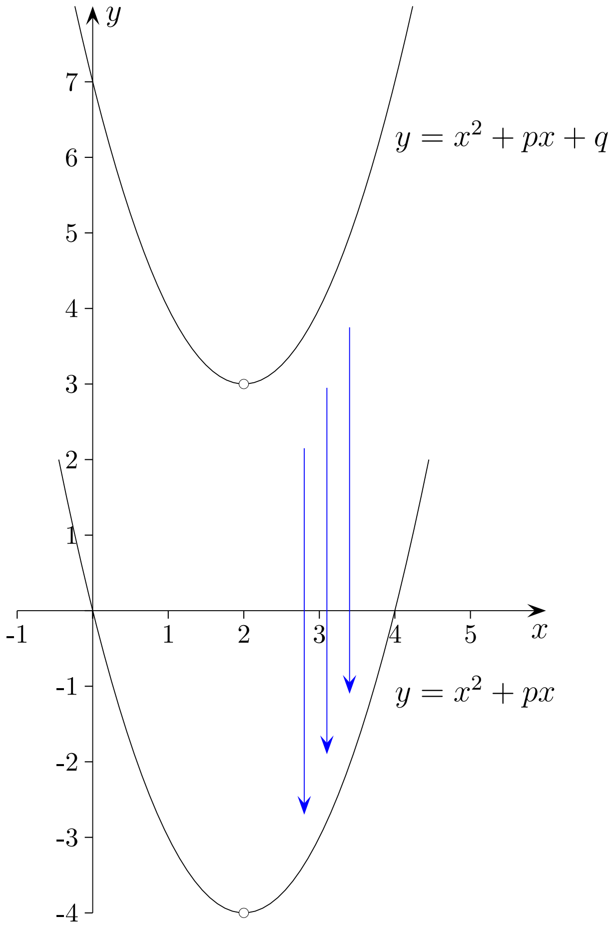
$$x_{\text{Scheitel}} = -\frac{p}{2}$$

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm d \\ x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

Der Zusammenhang von pq-Formel und Nullstellen einer Parabel $y = x^2 + px + q$ ist offensichtlich. Die Nullstellen ergeben sich, indem ein Wert d zu/von der x-Koordinate des Scheitels addiert bzw. subtrahiert wird.
Um die pq-Formel vor diesem anschaulichen Hintergrund herzuleiten, ist es erforderlich, zunächst die x-Koordinate des Scheitels zu ermitteln. Dies erfolgt auf der nächsten Seite.
Für die Berechnung von d wird die Parabel so verschoben, dass $(x_{\text{Scheitel}}\,|\,0)$ in den Ursprung fällt. Für die Nullstellen $\pm d$ der verschobenen Parabel ist lediglich eine Gleichung der Art $x^2 = \sqrt{a}$ (reinquadratisch) zu lösen.
Alternativ können $x_{\text{Scheitel}} = -\frac{p}{2}$, $y_{\text{Scheitel}} = -\frac{p^2}{4} + q$, die Scheitelform $y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$ und die Nullstellen mit $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \quad |\sqrt{}$ bestimmt werden.

x-Koordinate des Scheitels

Auf die x-Koordinate x_{Scheitel} des Scheitels hat der konstante Summand q keinen Einfluss. Er kann auf null gesetzt werden.

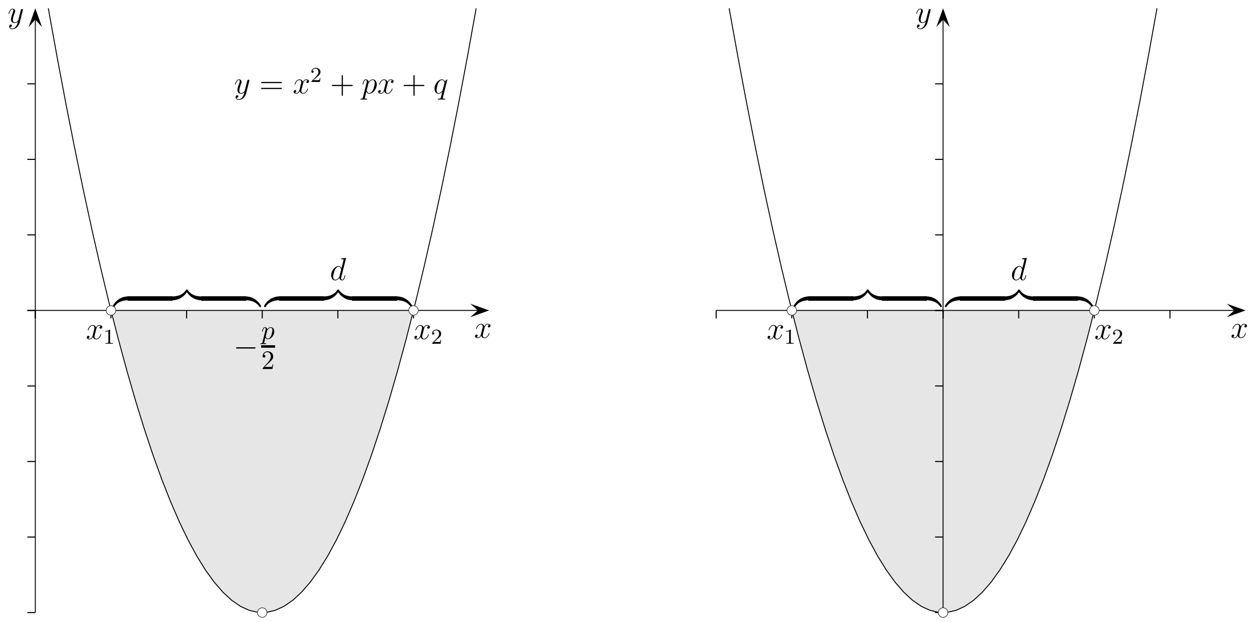


<u>Nullstellen der Parabel $y = x^2 + px$</u>

$$0 = x^2 + px$$
$$0 = x(x + p)$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -p$$

$$\Longrightarrow \quad x_{\text{Scheitel}} = -\frac{p}{2}$$

Parabel verschieben



$$
\begin{aligned}
y &= x^2 + px + q \\[1em]
y &= (x + x_{\text{Scheitel}})^2 + p(x + x_{\text{Scheitel}}) + q \qquad \text{Verschiebung} \\
&= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(x - \frac{p}{2}\right) + q \\
&\dots \\
&= x^2 - \frac{p^2}{4} + q
\end{aligned}
$$

<u>Nullstellen der verschobenen Parabel $y = x^2 - \frac{p^2}{4} + q$</u>

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{p^2}{4} - q \\
x_{1/2} &= \pm \underbrace{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}_{d}, \qquad \text{falls } \frac{p^2}{4} - q \geq 0
\end{aligned}
$$