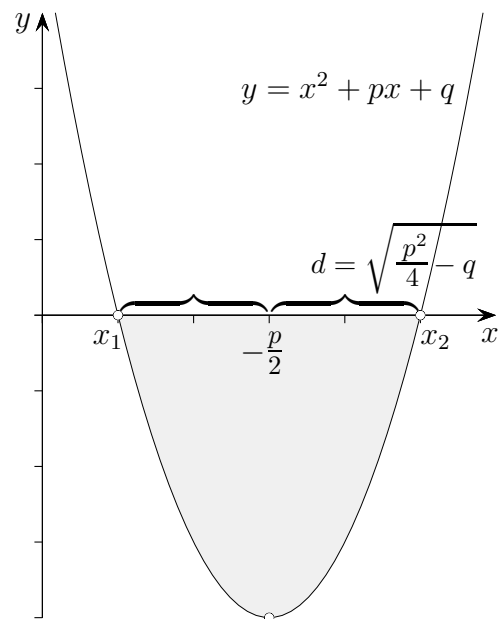


pq -Formel anschaulich



$$x_{\text{Scheitel}} = -\frac{p}{2}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm d$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Der Zusammenhang von pq -Formel und Nullstellen einer Parabel $y = x^2 + px + q$ ist offensichtlich. Die Nullstellen ergeben sich, indem ein Wert d zur x -Koordinate des Scheitels x_S addiert bzw. von der x -Koordinate des Scheitels subtrahiert wird.

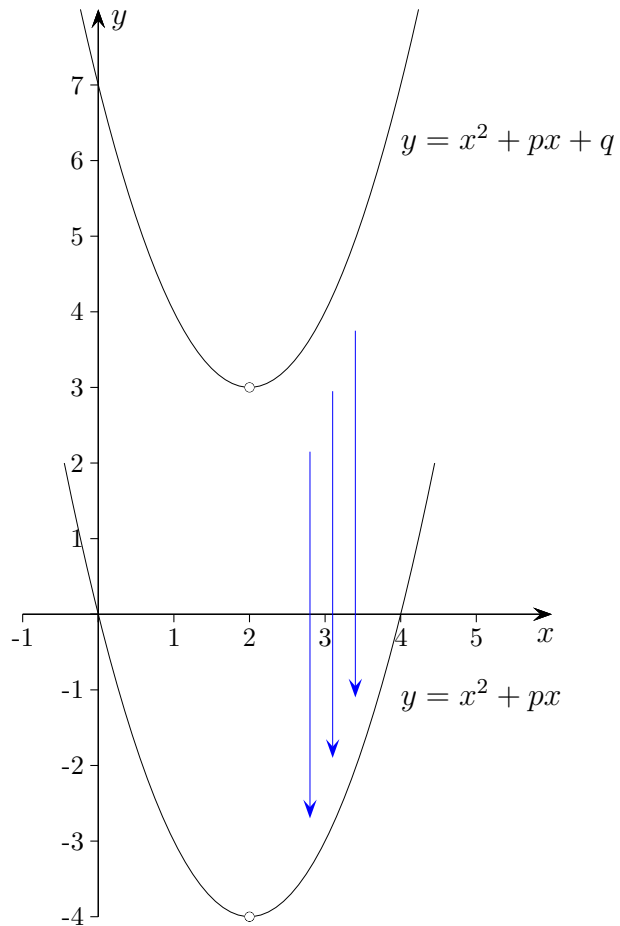
Um die pq -Formel vor diesem anschaulichen Hintergrund herzuleiten, ist es erforderlich, zunächst die x -Koordinate des Scheitels zu ermitteln. Dies erfolgt auf der nächsten Seite.

Für die Berechnung von d wird die Parabel so verschoben, dass $(x_{\text{Scheitel}} | 0)$ in den Ursprung fällt. Für die Nullstellen $\pm d$ der verschobenen Parabel ist lediglich eine Gleichung der Art $x^2 = a$ (reinquadratisch) zu lösen.

Alternativ können $x_{\text{Scheitel}} = -\frac{p}{2}$, $y_{\text{Scheitel}} = -\frac{p^2}{4} + q$, die Scheitelform $y = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q$ und die Nullstellen mit $(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q \quad |\sqrt{\quad}$ bestimmt werden.

x -Koordinate des Scheitels

Auf die x -Koordinate x_{Scheitel} des Scheitels hat der konstante Summand q keinen Einfluss. Er kann auf null gesetzt werden.



Nullstellen der Parabel $y = x^2 + px$

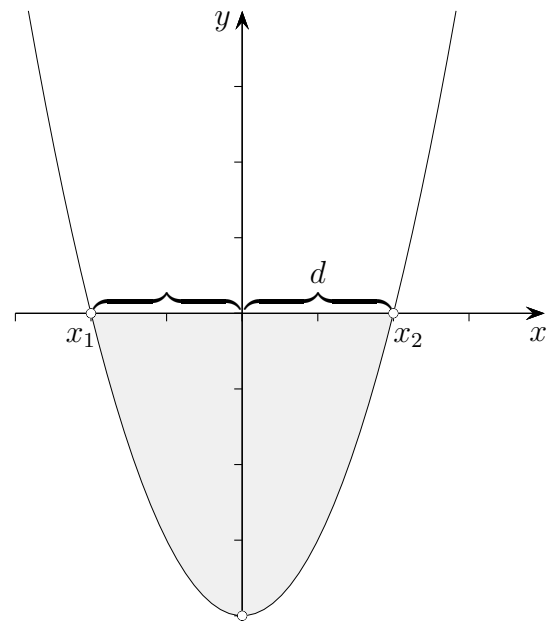
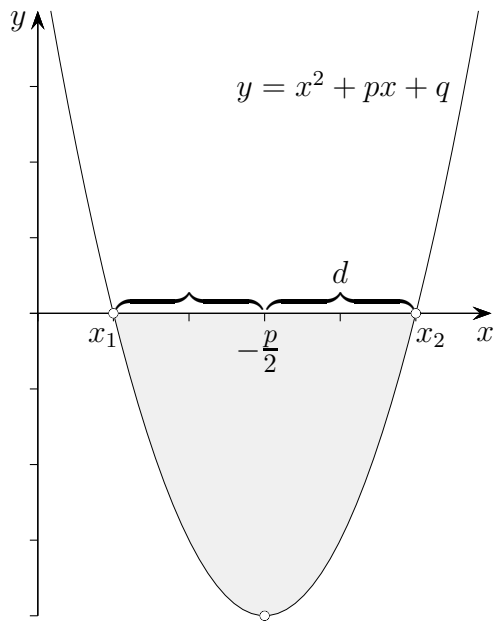
$$0 = x^2 + px$$

$$0 = x(x + p)$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -p$$

$$\implies x_{\text{Scheitel}} = -\frac{p}{2}$$

Parabel verschieben



$$y = x^2 + px + q$$

$$y = (x + x_{\text{Scheitel}})^2 + p(x + x_{\text{Scheitel}}) + q$$

Verschiebung

$$= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(x - \frac{p}{2}\right) + q$$

...

$$= x^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

Nullstellen der verschobenen Parabel $y = x^2 - \frac{p^2}{4} + q$

$$x^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$x_{1/2} = \pm \underbrace{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}_d, \quad \text{falls } \frac{p^2}{4} - q \geq 0$$