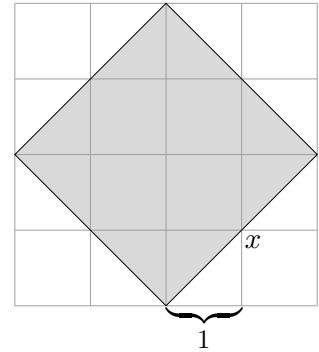


# Rechnen mit Wurzeln

1. a)  $\sqrt{49} = 7$ , weil  $7 \cdot 7 = 49$
- b)  $(\sqrt{49})^2 = 49$  allgemein:  $(\sqrt{a})^2 = a$ , ( $a > 0$ )
- c)  $3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$
- d)  $\sqrt{100a^2} = 10a$ , ( $a > 0$ )
- e)  $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- f)  $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$
- g) allgemein:  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- h)  $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$  (teilweises Wurzelziehen)
- i)  $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$
- j) allgemein:  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- k) es gilt jedoch nicht  $\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$
- l)  $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2^1\sqrt{2}}{2^1} = \sqrt{2}$  (Rationalmachen des Nenners)
- m)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-1} = 2 + \sqrt{2}$

Wie lang ist die Quadratseite?



2. Zerlege wie in 1. h) :

- a)  $\sqrt{40}$       b)  $\sqrt{50}$       c)  $\sqrt{45}$       d)  $\sqrt{48}$

3. Forme wie in 1. l) oder m) um:

- a)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$       b)  $\frac{5}{\sqrt{5}}$       c)  $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$       d)  $\frac{4}{\sqrt{5}+1}$

4. Löse die Klammern auf:

- a)  $(\sqrt{2} + 3)^2$       b)  $(4 - 3\sqrt{5})^2$       c)  $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$

5. Löse die Gleichungen nach  $x$  auf:

- a)  $5x^2 - 6 = 4x^2 + 3$       b)  $(x + 5)(x - 4) = x + 16$   
 c)  $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 = 34$       d)  $(x + 5)^2 + (x - 5)^2 = 58$   
 e)  $x^2 - \frac{x^2 - 1}{2} = 13$       f)  $\frac{x^2 + 5}{3} - \frac{x^2 - 1}{5} = 4$   
 g)  $2 - \frac{1}{\sqrt{x}} = a$       h)  $x\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{4} = 1$

# Rechnen mit Wurzeln

1. a)  $\sqrt{49} = 7$ , weil  $7 \cdot 7 = 49$
- b)  $(\sqrt{49})^2 = 49$  allgemein:  $(\sqrt{a})^2 = a$ , ( $a > 0$ )
- c)  $3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$
- d)  $\sqrt{100a^2} = 10a$ , ( $a > 0$ )
- e)  $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- f)  $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$
- g) allgemein:  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- h)  $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$  (teilweises Wurzelziehen)
- i)  $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$
- j) allgemein:  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- k) es gilt jedoch nicht  $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$
- l)  $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2^1 \sqrt{2}}{2^1} = \sqrt{2}$  (Rationalmachen des Nenners)
- m)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 + \sqrt{2}$

2. Zerlege wie in 1. h) :

- a)  $\sqrt{40}$       b)  $\sqrt{50}$       c)  $\sqrt{45}$       d)  $\sqrt{48}$

3. Forme wie in 1. l) oder m) um:

- a)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$       b)  $\frac{5}{\sqrt{5}}$       c)  $\frac{1}{\sqrt{3} - 2}$       d)  $\frac{4}{\sqrt{5} + 1}$

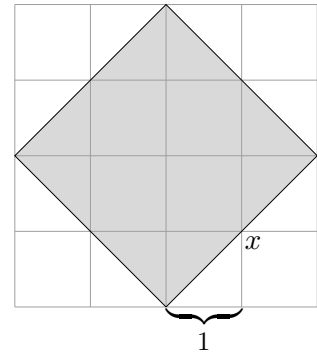
4. Löse die Klammern auf:

- a)  $(\sqrt{2} + 3)^2$       b)  $(4 - 3\sqrt{5})^2$       c)  $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$

5. Löse die Gleichungen nach  $x$  auf:

- a)  $5x^2 - 6 = 4x^2 + 3$       b)  $(x + 5)(x - 4) = x + 16$   
 c)  $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 = 34$       d)  $(x + 5)^2 + (x - 5)^2 = 58$   
 e)  $x^2 - \frac{x^2 - 1}{2} = 13$       f)  $\frac{x^2 + 5}{3} - \frac{x^2 - 1}{5} = 4$   
 g)  $2 - \frac{1}{\sqrt{x}} = a$       h)  $x\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{4} = 1$

Wie lang ist die Quadratseite?



Aus der Zeichnung ist der Flächeninhalt des Quadrats sofort zu erkennen, er beträgt 8 Flächeneinheiten.

Daher muss für  $x$  gelten:

$$\begin{aligned} x^2 &= 8 \\ x &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

2. a)  $\sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$
- b)  $5\sqrt{2}$
- c)  $3\sqrt{5}$
- d)  $4\sqrt{3}$

3. a)  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
- b)  $\sqrt{5}$
- c)  $-\sqrt{3} - 2$
- d)  $\sqrt{5} - 1$

4. a)  $11 + 6\sqrt{2}$
- b)  $61 - 24\sqrt{5}$
- c)  $30 + 12\sqrt{6}$

5. a)  $\begin{aligned} x^2 &= 9 \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$

b)  $6; -6$

c)  $1; -1$

d)  $2; -2$

e)  $5; -5$

f)  $4; -4$

g)  $\frac{1}{(2-a)^2}$

h)  $x\sqrt{x} = \frac{4}{3} \quad | (\ )^2$

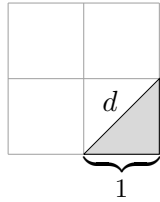
$$x^3 = \frac{16}{9}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{16}{9}}$$

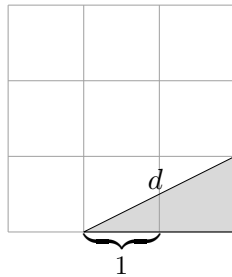
# Rechnen mit Wurzeln Anwendung

Wie lang ist  $d$ ?

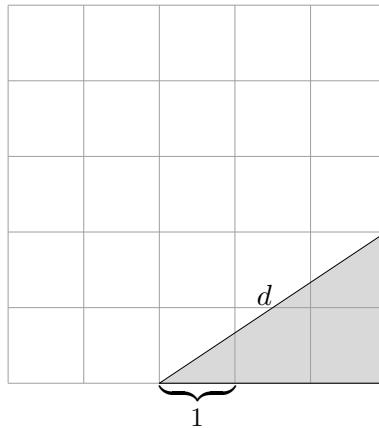
a)



b)



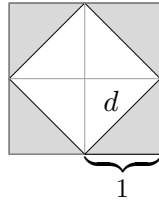
c)



# Rechnen mit Wurzeln Anwendung

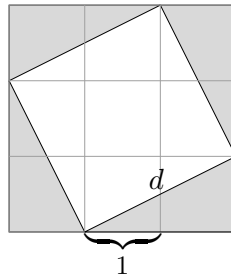
Wie lang ist  $d$ ?

a)



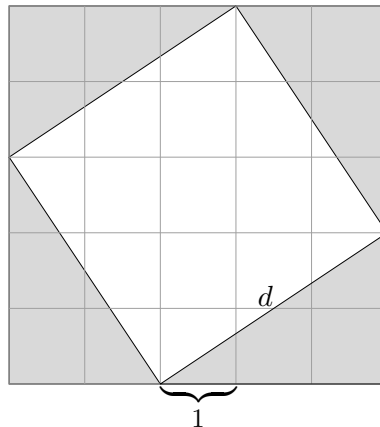
$$d^2 = 2 \quad \text{d.h.} \quad d = \sqrt{2}$$

b)



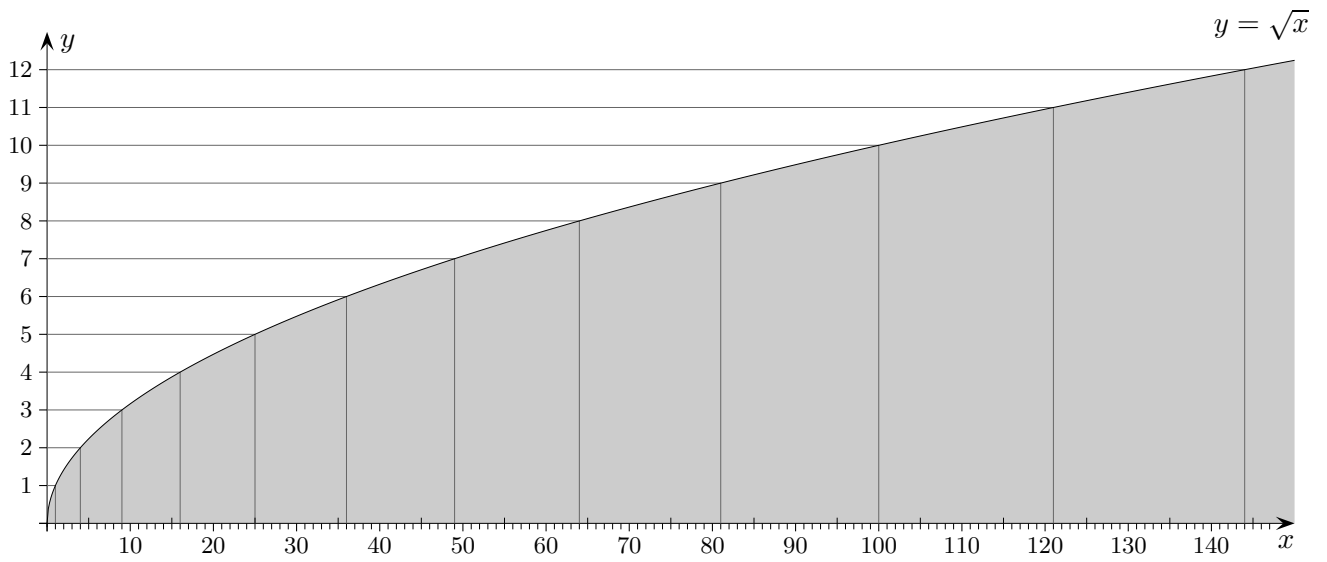
$$d^2 = 9 - 2 \cdot 2 = 5 \quad \text{d.h.} \quad d = \sqrt{5}$$

c)

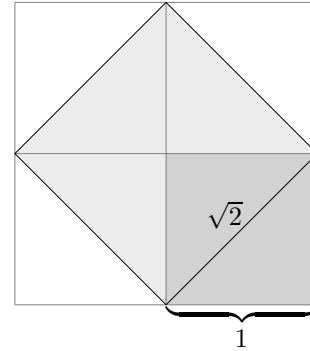


$$d^2 = 25 - 2 \cdot 6 = 13 \quad \text{d.h.} \quad d = \sqrt{13}$$

# Wurzelfunktion



# Irrationale Zahlen, d. h. keine rationalen



$$\sqrt{2} = 1,414213562373095049 \dots \quad \text{löst } x^2 = 2.$$

$$1,414213562373095049 \cdot 1,414213562373095049 = 2,000000000000000000560908991588312401$$

Dass  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$  usw. jeweils mit keinem Bruch  $\frac{p}{q}$  übereinstimmen, verwundert nicht.

Wäre  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , so würde  $2 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$  folgen.

Wenn  $\frac{p}{q}$  nicht weiter kürzbar ist, und dafür können wir sorgen, so kann  $\frac{pp}{qq}$  auch nicht kürzbar sein, soll aber 2 ergeben. Das ist nur möglich, wenn  $pp = 2qq$  ist. Dann wäre jedoch  $\frac{pp}{qq}$  kürzbar.

(2 ist Faktor von  $pp$ , also auch von  $p$ . Somit ist 4 Faktor von  $pp$ , folglich ist 2 Faktor von  $q$ .)

Wir verwickeln uns in einen Widerspruch, der nur aufgelöst werden kann,

wenn die Ausgangslage  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  als falsch erkannt wird.

## 2. Möglichkeit

Wäre  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , so würde  $2 = \frac{p^2}{q^2}$ , bzw.  $2q^2 = p^2$  folgen.

$\frac{p}{q}$  ist nicht (weiter) kürzbar, dafür haben wir gesorgt.

Wir überlegen uns, dass die letzten Ziffern rechts und links von  $2q^2 = p^2$  nicht gleich sein können, indem wir alle Möglichkeiten aufschreiben. Beachte,  $p$  und  $q$  können nicht auf null oder 5 enden.

Weiteres

Aus  $2 = 10^q \frac{p}{q}$  würde  $2^q = 10^p$ , bzw.  $2^q = 2^p \cdot 5^p$  folgen. Warum kann das nicht sein?

Die irrationalen Zahlen bilden zusammen mit den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ .

Für theoretische Überlegungen (Länge einer Diagonalen) sind sie unverzichtbar. Für praktische Zwecke reichen Näherungen, die sind aus  $\mathbb{Q}$ . Eine Entscheidung  $x$  rational oder irrational wird im weiteren Unterricht nicht benötigt. Vermutlich ist z.B.  $\pi^{\sqrt{2}}$  irrational. Bewiesen ist das nicht.