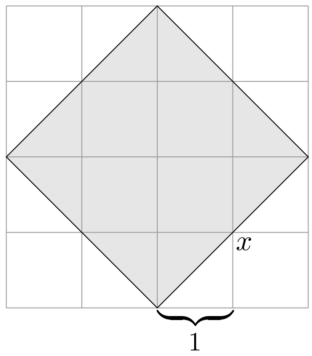
Rechnen mit Wurzeln

Wie lang ist die Quadratseite?



1. a) $\sqrt{49} = 7, \quad$ weil $7 \cdot 7 = 49$

   b) $\left(\sqrt{49}\,\right)^2 = 49 \quad$ *allgemein:* $(\sqrt{a}\,)^2 = a, \quad (a > 0)$

   c) $3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$

   d) $\sqrt{100a^2} = 10a, \quad (a > 0)$

   e) $\left(\sqrt{2}\,\right)^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\,\sqrt{2}$

   f) $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$

   g) *allgemein:* $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

   h) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \quad$ *(teilweises Wurzelziehen)*

   i) $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

   j) *allgemein:* $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   k) *es gilt jedoch <u>nicht</u>* $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

   l) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\cancel{2}^1\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} = \sqrt{2} \quad$ *(Rationalmachen des Nenners)*

   m) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 + \sqrt{2}$

2. Zerlege wie in 1. h) :

   a) $\sqrt{40}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{45}$ d) $\sqrt{48}$

3. Forme wie in 1. l) oder m) um:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - 2}$ d) $\dfrac{4}{\sqrt{5} + 1}$

4. Löse die Klammern auf:

   a) $\left(\sqrt{2} + 3\,\right)^2$ b) $\left(4 - 3\sqrt{5}\,\right)^2$ c) $\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\,\right)^2$

5. Löse die Gleichungen nach x auf:

   a) $5x^2 - 6 = 4x^2 + 3$ b) $(x + 5)(x - 4) = x + 16$

   c) $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 = 34$ d) $(x + 5)^2 + (x - 5)^2 = 58$

   e) $x^2 - \dfrac{x^2 - 1}{2} = 13$ f) $\dfrac{x^2 + 5}{3} - \dfrac{x^2 - 1}{5} = 4$

   g) $2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = a$ h) $x\sqrt{x} - \dfrac{x\sqrt{x}}{4} = 1$

Rechnen mit Wurzeln

1. a) $\sqrt{49} = 7, \quad$ weil $7 \cdot 7 = 49$

   b) $\left(\sqrt{49}\,\right)^2 = 49 \qquad$ *allgemein:* $(\sqrt{a}\,)^2 = a, \quad (a > 0)$

   c) $3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$

   d) $\sqrt{100a^2} = 10a, \quad (a > 0)$

   e) $\left(\sqrt{2}\,\right)^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\,\sqrt{2}$

   f) $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$

   g) *allgemein:* $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

   h) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$ *(teilweises Wurzelziehen)*

   i) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

   j) *allgemein:* $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   k) *es gilt jedoch <u>nicht</u>* $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

   l) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\cancel{2}^1\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} = \sqrt{2}$ *(Rationalmachen des Nenners)*

   m) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 + \sqrt{2}$

2. Zerlege wie in 1. h) :

   a) $\sqrt{40}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{45}$ d) $\sqrt{48}$

3. Forme wie in 1. l) oder m) um:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - 2}$ d) $\dfrac{4}{\sqrt{5} + 1}$

4. Löse die Klammern auf:

   a) $\left(\sqrt{2} + 3\,\right)^2$ b) $\left(4 - 3\sqrt{5}\,\right)^2$ c) $\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\,\right)^2$

5. Löse die Gleichungen nach x auf:

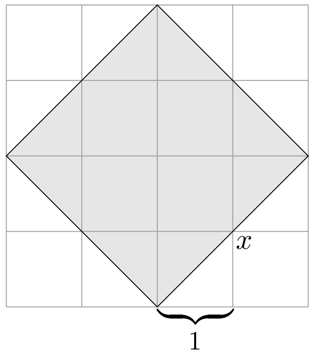
   a) $5x^2 - 6 = 4x^2 + 3$ b) $(x + 5)(x - 4) = x + 16$

   c) $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 = 34$ d) $(x + 5)^2 + (x - 5)^2 = 58$

   e) $x^2 - \dfrac{x^2 - 1}{2} = 13$ f) $\dfrac{x^2 + 5}{3} - \dfrac{x^2 - 1}{5} = 4$

   g) $2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = a$ h) $x\sqrt{x} - \dfrac{x\sqrt{x}}{4} = 1$

Wie lang ist die Quadratseite?



Aus der Zeichnung ist der Flächeninhalt des Quadrats sofort zu erkennen, er beträgt 8 Flächeneinheiten.
Daher muss für x gelten:

$$\begin{aligned} x^2 &= 8 \\ x &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

2. a) $\sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$
   b) $5\sqrt{2}$
   c) $3\sqrt{5}$
   d) $4\sqrt{3}$

3. a) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
   b) $\sqrt{5}$
   c) $-\sqrt{3} - 2$
   d) $\sqrt{5} - 1$

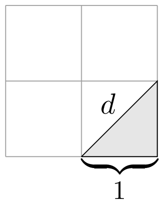
4. a) $11 + 6\sqrt{2}$
   b) $61 - 24\sqrt{5}$
   c) $30 + 12\sqrt{6}$

5. a) $$\begin{aligned} x^2 &= 9 \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$
   b) $6\,;\,-6$
   c) $1\,;\,-1$
   d) $2\,;\,-2$
   e) $5\,;\,-5$
   f) $4\,;\,-4$
   g) $\dfrac{1}{(2 - a)^2}$
   h) $$\begin{aligned} x\sqrt{x} &= \frac{4}{3} \qquad |\ (\ )^2 \\ x^3 &= \frac{16}{9} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{16}{9}} \end{aligned}$$

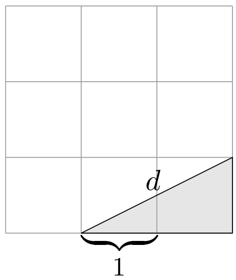
Rechnen mit Wurzeln   Anwendung

Wie lang ist d?

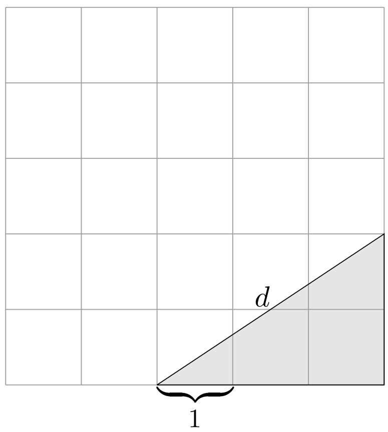
a)



b)



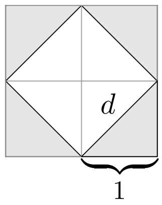
c)



Rechnen mit Wurzeln Anwendung

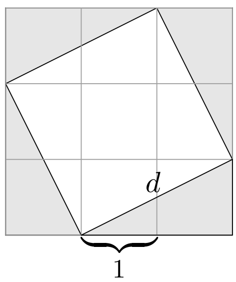
Wie lang ist d?

a)



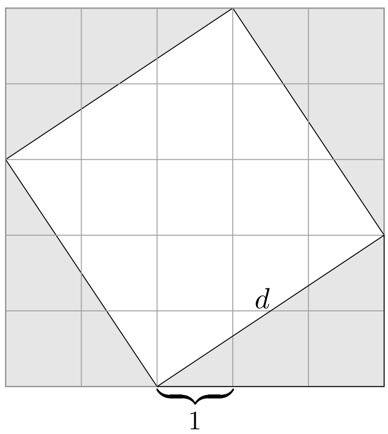
$d^2 = 2$ d.h. $d = \sqrt{2}$

b)



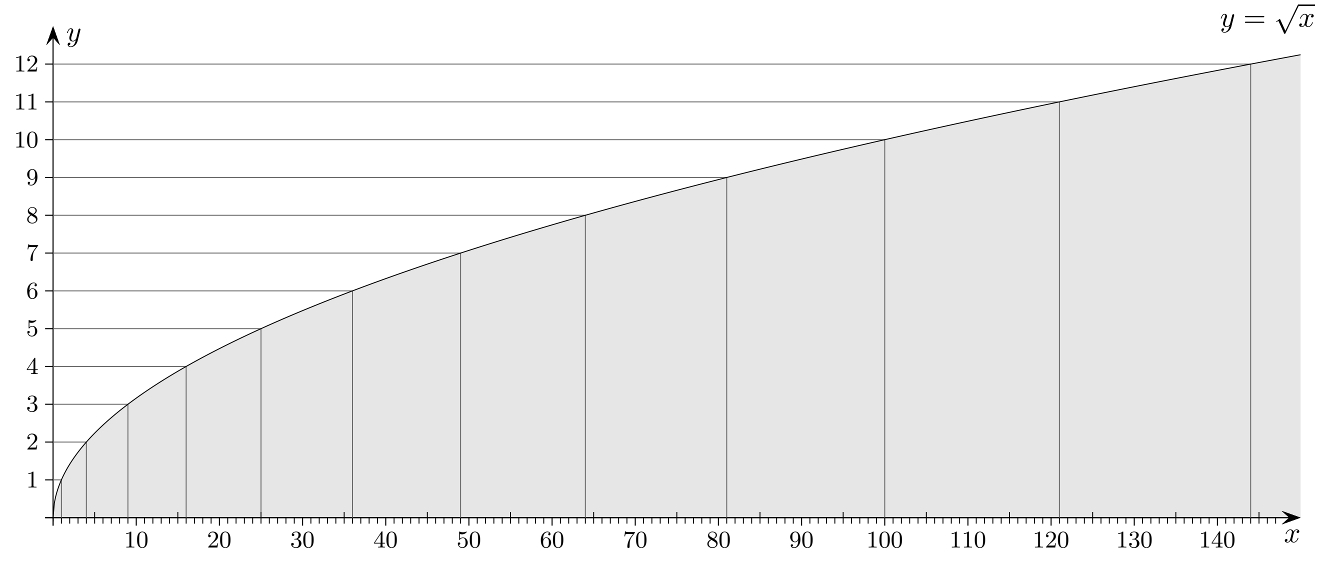
$d^2 = 9 - 2 \cdot 2 = 5$ d.h. $d = \sqrt{5}$

c)

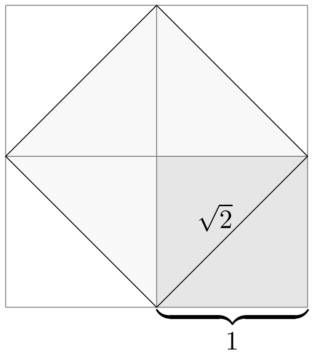


$d^2 = 25 - 2 \cdot 6 = 13$ d.h. $d = \sqrt{13}$

Wurzelfunktion



Irrationale Zahlen, d.h. keine rationalen



$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots$ löst $x^2 = 2$, $2 = 1{,}\overline{9}$.

$$1{,}4142135623730\,95 \cdot 1{,}414213562373095 = 1{,}99999999999999998619679798790025$$

$$1{,}41421356237309504 \cdot 1{,}41421356237309504 = 1{,}9999999999999999975105064868872601 6$$

Endliche Dezimalzahlen ins Quadrat können nicht exakt 2 ergeben, man achte auf die letzte Ziffer.

Dass $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ usw. jeweils mit keinem Bruch $\frac{p}{q}$ übereinstimmen, verwundert nicht.

Wäre $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, so würde $2 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$ folgen.
Wenn $\frac{p}{q}$ nicht weiter kürzbar ist, und dafür können wir sorgen, so kann $\frac{pp}{qq}$ auch nicht kürzbar sein, soll aber 2 ergeben. Das ist nur möglich, wenn $pp = 2qq$ ist. Dann wäre jedoch $\frac{pp}{qq}$ kürzbar.
(2 ist Faktor von pp, also auch von p. Somit ist 4 Faktor von pp, folglich ist 2 Faktor von q.)
Wir verwickeln uns in einen Widerspruch, der nur aufgelöst werden kann,
wenn die Ausgangslage $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ als falsch erkannt wird.

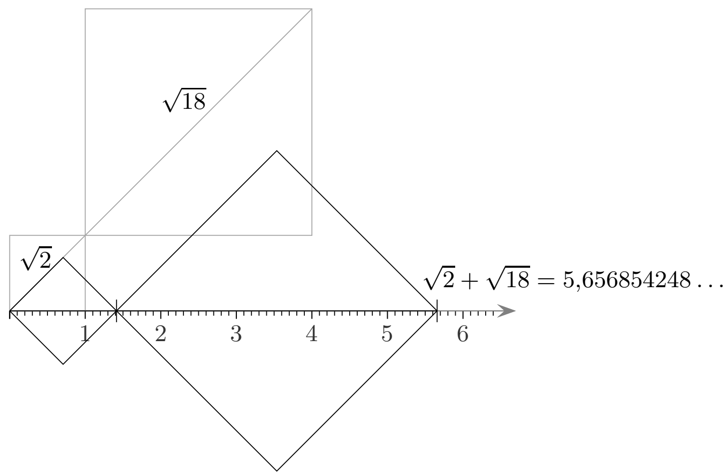
2. Möglichkeit
Wäre $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, so würde $2 = \frac{p^2}{q^2}$, bzw. $2q^2 = p^2$ folgen.
$\frac{p}{q}$ ist nicht (weiter) kürzbar, dafür haben wir gesorgt.
Wir überlegen uns, dass die letzten Ziffern rechts und links von $2q^2 = p^2$ nicht gleich sein können, indem wir alle Möglichkeiten aufschreiben. Beachte, p und q können nicht auf null oder 5 enden.

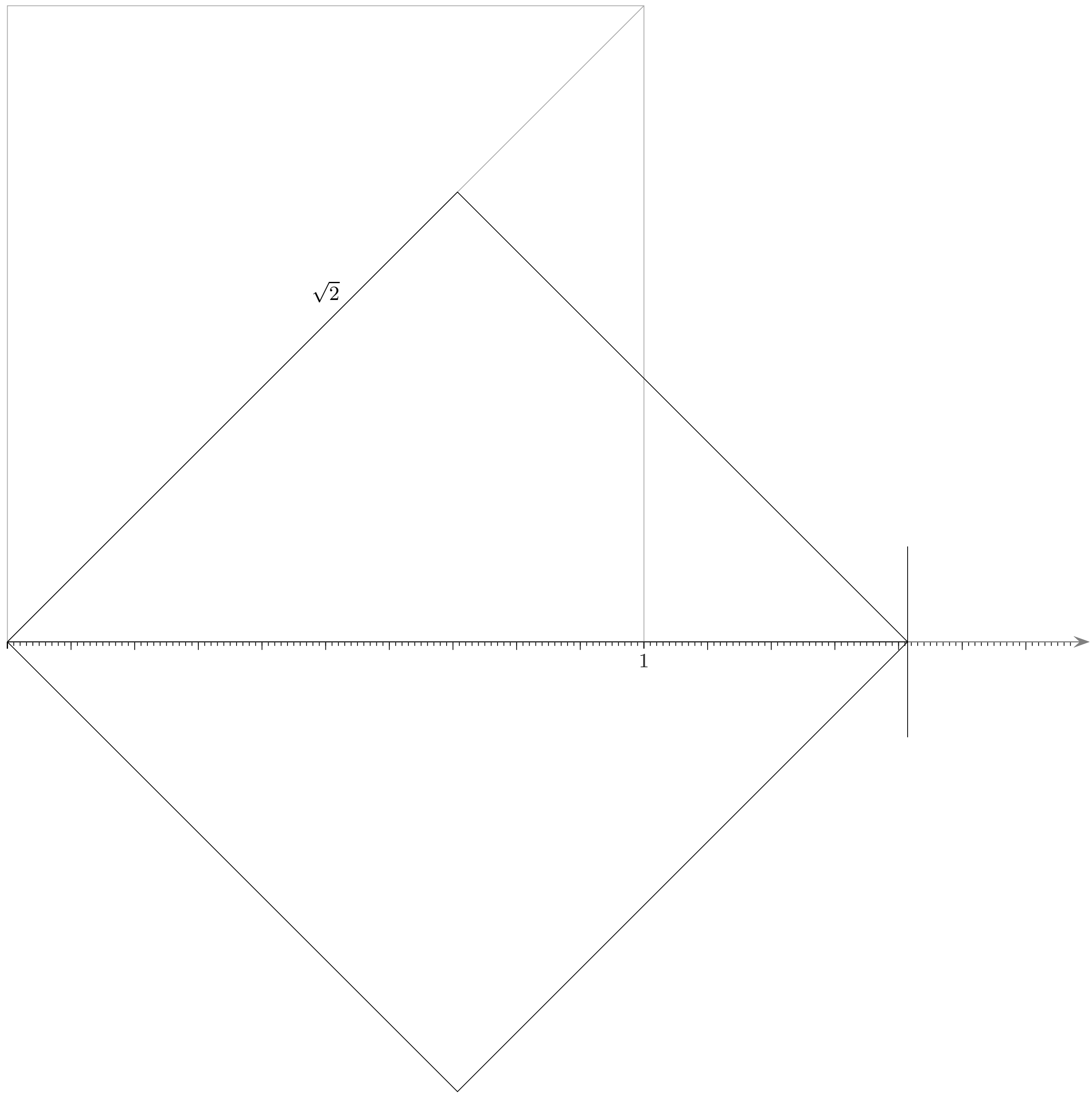
Weiteres
Aus $2 = 10^{\frac{p}{q}}$ würde $2^q = 10^p$, bzw. $2^q = 2^p \cdot 5^p$ folgen. Warum kann das nicht sein?

Die irrationalen Zahlen bilden zusammen mit den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
Für theoretische Überlegungen (Länge einer Diagonalen) sind sie unverzichtbar. Für praktische Zwecke reichen Näherungen, die sind aus $\mathbb{Q}$. Eine Entscheidung x rational oder irrational wird im weiteren Unterricht nicht benötigt. Vermutlich ist z.B. $\pi^{\sqrt{2}}$ irrational. Bewiesen ist das nicht.

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016\ldots$$

Durch wiederholtes 10-faches Vergrößern wird jeweils eine weitere Nachkommastelle von $\sqrt{2} = 1{,}4\ldots$ und $\sqrt{2} + \sqrt{18} = 5{,}6\ldots$ sichtbar.

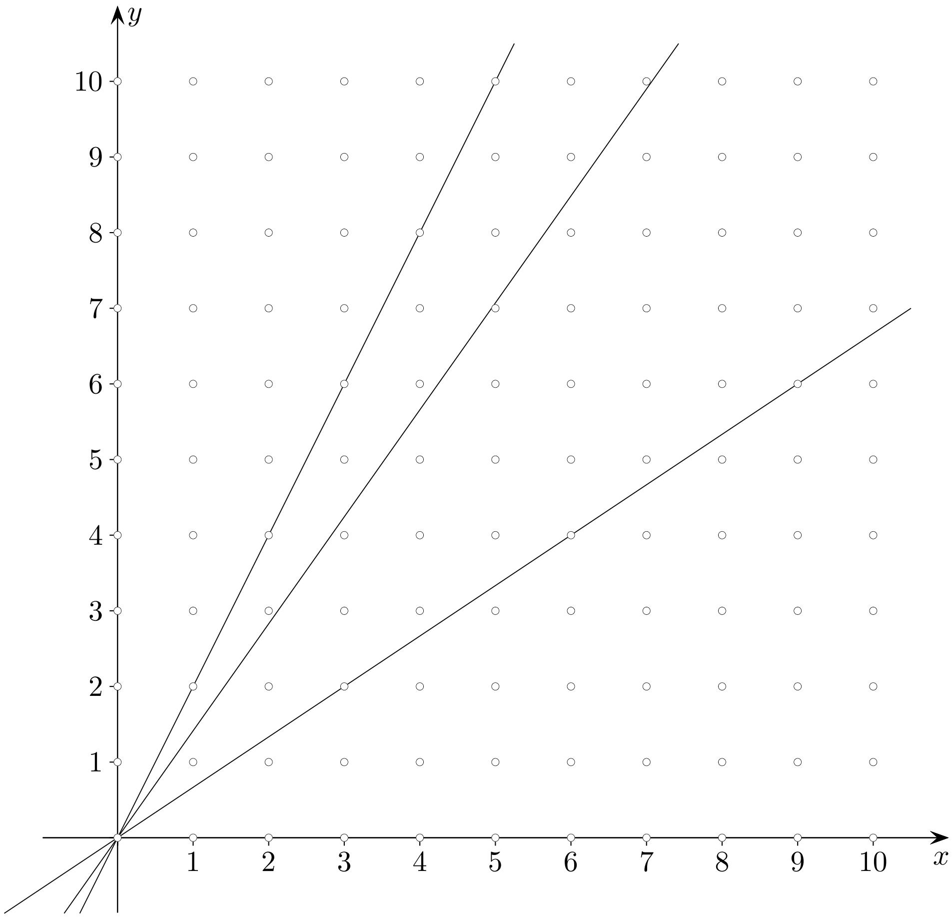




Da das Rechnen mit Wurzeln einsehbar ist, wird die Akzeptanz irrationaler Zahlen auf dieser Klassenstufe kein Problem darstellen. Die unendlich vielen Nachkommastellen rücken aus dem Blickfeld, es wird mit Näherungen gerechnet. Die Griechen in der Antike hat erschüttert, dass sich die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats nicht als Quotient zweier natürlicher Zahlen berechnen lässt und somit $\sqrt{2}$ für sie keine Zahl sein kann. Dieser Sachverhalt berührt einen (eine) Neunklässler(in) nicht so heftig. Für ein Verständnis von Grenzwertbildungen im 11. Jg. wird dann aber eine vertiefte Betrachtung der reellen Zahlen erforderlich sein.

Irrationalität

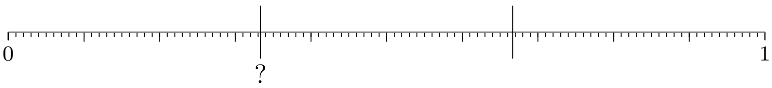
Gibt es eine Gerade durch den Ursprung, die keinen einzigen Gitterpunkt (das sind die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) enthält?
Aus Symmetriegründen kann man sich auf den ersten Quadranten beschränken.



Die Grafik enthält: $y = 2x,\ y = \frac{2}{3}x,\ y = \sqrt{2}x$

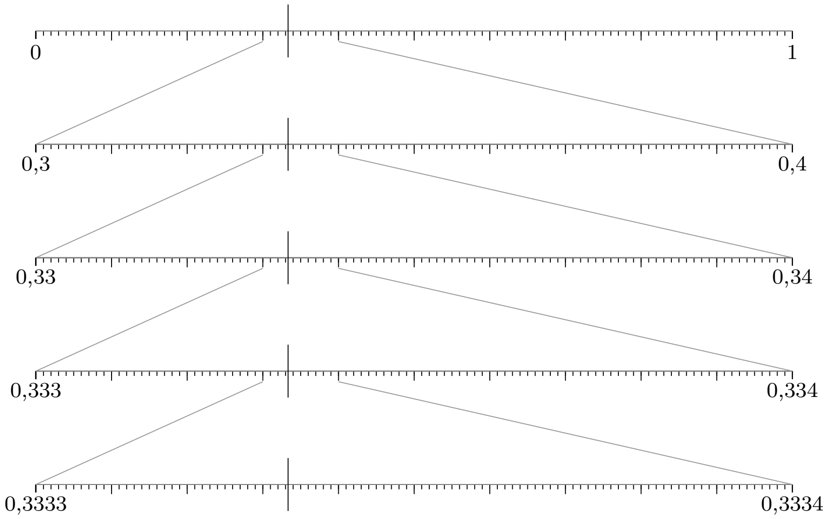
Da sich $\sqrt{2}$ nicht als Bruch $\frac{m}{n}$ darstellen lässt, kann die Gerade $y = \sqrt{2}x$ keinen Gitterpunkt enthalten. Der Blick durch den unbegrenzten „Forst“ ist möglich, und das auf vielfältige Weise.

$$\frac{1}{3} = ?$$



Die Strecke der Länge 1 wird in 3 gleiche Teile geteilt.
Lies die Dezimaldarstellung von $\frac{1}{3}$ aus der Grafik ab.

$$\frac{1}{3} = ?$$



Zunächst erhalten wir die Näherung $\frac{1}{3} \approx 0{,}3$.

Das Intervall $[0{,}3; 0{,}4]$ wird auch in 3 Teile geteilt. Die bessere Näherung ist dann $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

Das Intervall $[0{,}33; 0{,}34]$ wird auch in 3 Teile geteilt. Die bessere Näherung ist dann $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$.

usw.

Es muss $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ sein.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0{,}3333\ldots \quad | \cdot 3 \\ 1 &= 0{,}9999\ldots \end{aligned}$$

Bei einer irrationalen Zahl sind die Nachkommastellen nicht abbrechend und nicht periodisch.

Natürliche, rationale und irrationale Zahlen

Wir nehmen es heute etwas genauer:

$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980\ldots$

Quadrate endlicher Dezimal-Näherungen von $\sqrt{2}$ lauten:

$1{,}414213562^2 = 1{,}99999999328787 36$

$1{,}41421356237309^2 = 1{,}9999999999999857198323561481$

$1{,}4142135623730950488011^2 = 1{,}99999999999999999999980519937638205715376011$

An den Endziffern ($6^2 = 36$, $9^2 = 81$, $1^2 = 1$) ist zu erkennen, dass ein endlicher Dezimalbruch als genaues Ergebnis nicht in Frage kommt. Rationale Zahlen sind entweder endliche oder periodische Dezimalzahlen.

Welche Brüche $\frac{p}{q}$ sind also auszuschließen?

$\frac{14}{2 \cdot 5} = \frac{14}{10} = 1{,}4$

$\frac{141}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{141}{100} = 1{,}41$

Es sind genau die Brüche, die so erweitert werden können, dass im Nenner eine Potenz von 10 steht. Der Nenner kann dann nur Potenzen der Primfaktoren 2 oder/und 5. enthalten ($10 = 2 \cdot 5$). Falls im gekürzten Bruch der Nenner mindestens einen anderen Primfaktor enthält, ist die Dezimalzahl nicht endlich, also periodisch.

$\frac{13}{3 \cdot 2 \cdot 5} = 0{,}4\overline{3}$

$\frac{13}{7 \cdot 2 \cdot 5} = 0{,}1\overline{857142}$

Nochmal zu $a = \sqrt{2}$.

Wenn a eine periodische Dezimalzahl wäre, müsste der Nenner seines Bruchs einen von 2 und 5 verschiedenen Primteiler enthalten. Im Quadrat von a ginge der Primteiler nicht verloren, a^2 müsste also periodisch sein. Nun soll a^2 gleich 2 sein, 2 ist aber nicht periodisch.
a ist somit irrational. Diese Überlegungen belegen:

Die Wurzel aus einer natürlichen Zahl ist entweder aus $\mathbb{N}$, z. B. $\sqrt{16} = 4$, oder irrational.

Näherungsbrüche für $\sqrt{2}$ wie

$$\frac{99}{70} = 1{,}4\overline{142857}$$

$$\frac{577}{408} = 1{,}414\overline{2156862745098039}$$

können beliebig genau ermittelt werden. Entweder sind sie endlich oder periodisch.

„Der Zahl $\sqrt{2}$ ist die Periode abhanden gekommen.“

Es sollte hier kein eleganter, kurzer Beweis geführt werden, sondern es sollten schulnahe Überlegungen angestellt werden.

Siehe auch (Unterrichtende):

rekursive Folgen
Kettenbrüche
Startseite