Startseite

↑ Vier-Felder-Tafel

Medizinische Tests sind grundsätzlich mit zwei Fehlern behaftet:

1. Erkrankte werden als gesund,
2. Gesunde als krank eingestuft.

Der 1. Fehler wird üblicherweise (nicht nur von Test-Entwicklern) in der Angabe versteckt, dass der Test z. B. mit 80 %-iger Sicherheit die Krankheit bei Erkrankten erkennt. Bei Gesunden versagt der Test z. B. mit 2 %-iger Wahrscheinlichkeit, d. h. 2 % der Gesunden werden vom Test irrtümlich als krank eingestuft.

Von besonderer Bedeutung ist nun die Frage:

Angenommen, eine Person wird getestet und das Ergebnis ist positiv (das ist eine etwas gewöhnungsbedürftige Sprechweise, dass der Test auf eine Krankheit hinweist, wenn z. B. ein Virus entdeckt wurde). Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die getestete Person nun tatsächlich erkrankt?

Um diese Frage beantworten zu können, ist es erforderlich zu wissen, wie groß der Anteil der Erkrankten in der Bevölkerung ist (betrachte hierzu die Extreme 0 % und 100 %).
Nehmen wir daher an, es seien 0,1 %, die erkrankt sind.

Um uns die Situation vor Augen zu führen, betrachten wir statt relativer Häufigkeiten konkrete Anzahlen und gehen daher von einer Bevölkerungszahl von 100 000 aus. Die absoluten Häufigkeiten können nun übersichtlich in eine sogenannte Vier-Felder-Tafel eingetragen und unsere Frage beantwortet werden.

	krank	*gesund*	*Summe*
Test pos.	a	b	$a+b$
Test neg.	c	d	$c+d$
Summe	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

Erläutere das erstaunliche Ergebnis.

↑ Vier-Felder-Tafel   Fortsetzung

	krank	*gesund*	*Summe*
Test pos.	80	1998	2078
Test neg.	20	97 902	97 922
Summe	100	99 900	100 000

Der Anteil der Erkrankten unter den Test-Positiven beträgt lediglich: $\frac{80}{2078} = 3{,}8\,\%$.

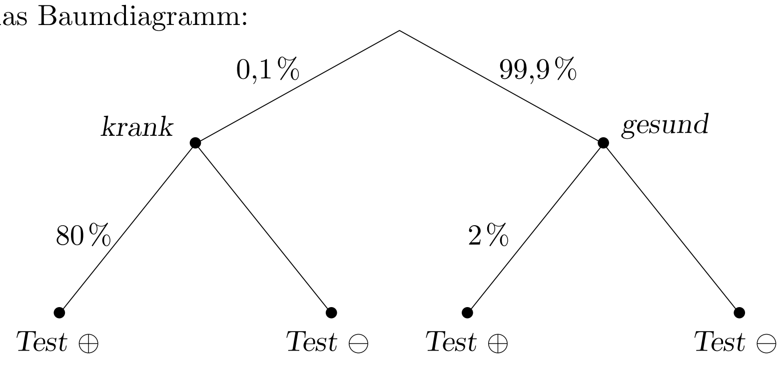
Dieses Ergebnis kann auch ohne Umweg aus den Prozent-Angaben erzielt werden.
Dazu werden relative Häufigkeiten in die Vier-Felder-Tafel eingetragen.

	krank	*gesund*	*Summe*
Test pos.	$80\,\% \cdot 0{,}1\,\%$	$2\,\% \cdot 99{,}9\,\%$	$80\,\% \cdot 0{,}1\,\% + 2\,\% \cdot 99{,}9\,\%$
Test neg.			
Summe	$0{,}1\,\%$	$99{,}9\,\%$	$100\,\%$

Wieder erhalten wir als Anteil der Erkrankten unter den Test-Positiven:

$$\frac{80\,\% \cdot 0{,}1\,\%}{80\,\% \cdot 0{,}1\,\% \;+\; 2\,\% \cdot 99{,}9\,\%} = 3{,}8\,\% \qquad \left(= \frac{80\,\% \cdot 0{,}1\,\% \cdot 100\,000}{80\,\% \cdot 0{,}1\,\% \cdot 100\,000 \;+\; 2\,\% \cdot 99{,}9\,\% \cdot 100\,000} = \frac{80}{2078}\right).$$

Eine etwas dynamischere Darstellung ist das Baumdiagramm:



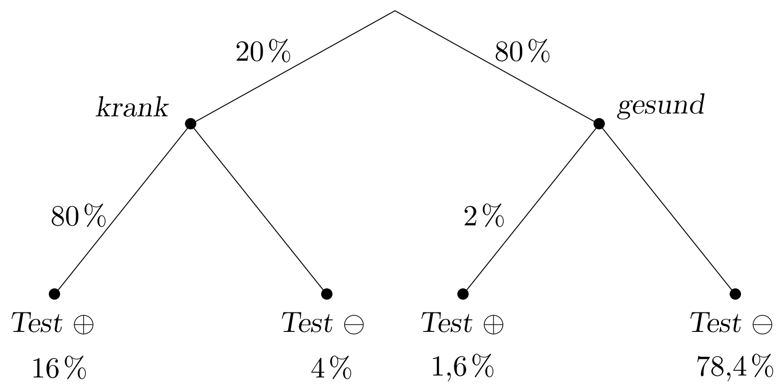
↑ Variation des Problems

Nehmen wir an, dass die zu testende Person einer Risikogruppe angehört (z. B. wegen ungesunder Ernährung, Alter über 50), in der die Wahrscheinlichkeit zu erkranken 20 % (15 %, 10 %, 5 %, 1 %) beträgt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die getestete Person nun tatsächlich erkrankt, falls das Testergebnis positiv ist?

Für eine Gruppengröße von 500 ergibt dies:

	krank	*gesund*	*Summe*
Test pos.	80	8	88
Test neg.	20	392	412
Summe	100	400	500

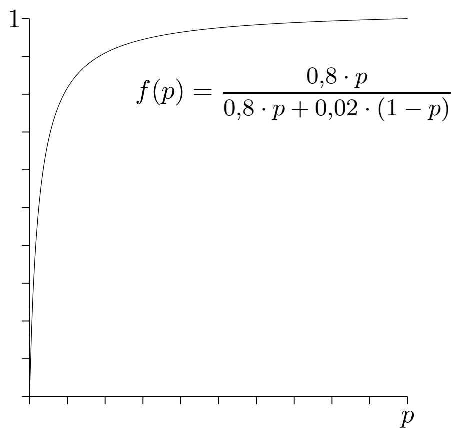
Der Anteil der Erkrankten unter den Test-Positiven erhöht sich auf: $\frac{80}{88} = 90{,}9\,\%$.



Anteil der Erkrankten unter den Test-Positiven (mit dem Pfaddiagramm):

$$\frac{20\,\% \cdot 80\,\%}{20\,\% \cdot 80\,\% \;+\; 80\,\% \cdot 2\,\%} = 90{,}9\,\%$$

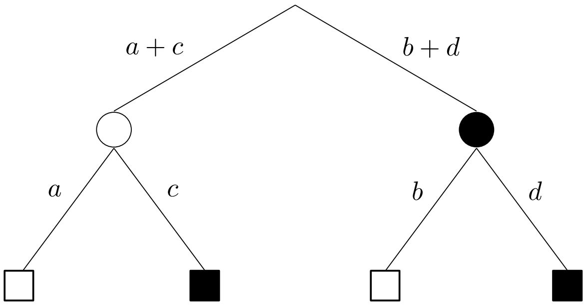
15 %	87,6 %
10 %	81,6 %
5 %	67,8 %
1 %	28,8 %

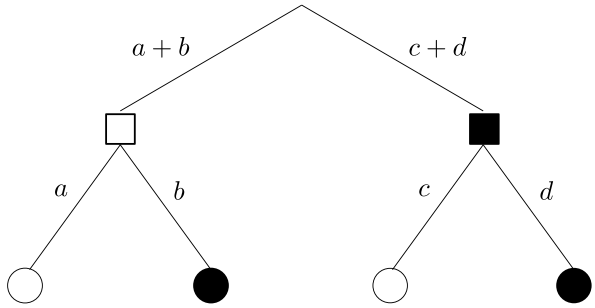


↑ Vier-Felder-Tafel Baumdiagramm

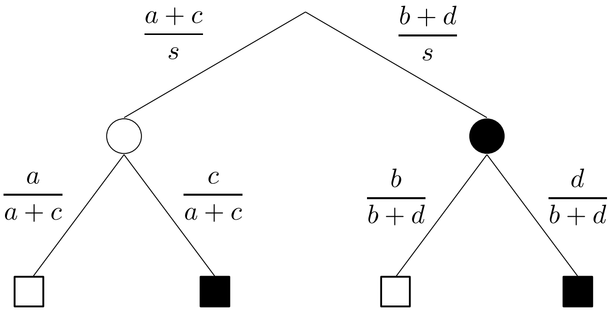
	○	●	*Summe*
□	a	b	$a+b$
■	c	d	$c+d$
Summe	$a+c$	$b+d$	$s=a+b+c+d$

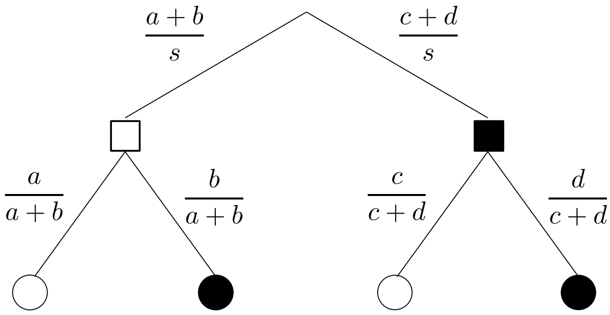
Die Beziehungen der Zahlen in der Vier-Felder-Tafel können auf zwei Weisen in einem Baumdiagramm dargestellt werden:





Die Grundgesamtheit setzt sich aus den Summanden a, b, c und d der Vier-Felder-Tafel zusammen. Bei Prozentangaben ergeben diese Zahlen zusammen 100 %, sie beziehen sich also alle auf die Grundgesamtheit. Ist man jedoch an Anteilen (relativen Häufigkeiten) bzw. Wahrscheinlichkeiten interessiert, so sind Quotienten zu bilden. Ihre Summe ist für eine Verästelung stets 1.





Sind Anteile (relative Häufigkeiten) gegeben und wird beabsichtigt, eine Vier-Felder-Tafel zu erstellen, dann sind aus den Anteilen die absoluten Häufigkeiten zu errechnen.

↑ Pfaddiagramm und Vier-Felder-Tafel

Wir verwenden die Abkürzungen:

m	männlich
w	weiblich
$\geq$	Gehalt beträgt mindestens 3000 €
$<$	Gehalt beträgt weniger als 3000 €

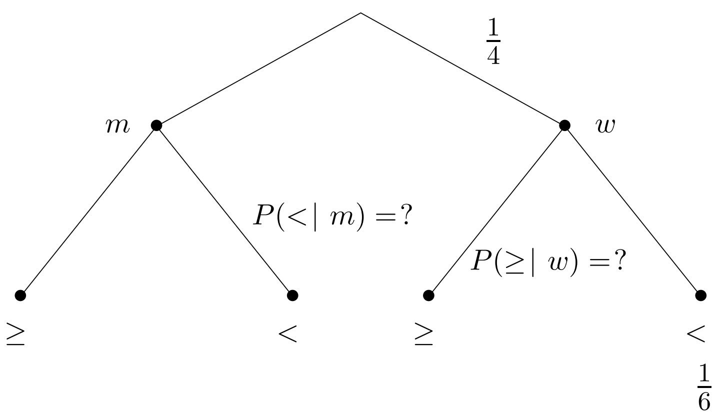
Die Anteile für einen Betrieb seien:

$$P(w) = \frac{1}{4}$$

$$P(w \text{ und } <) = \frac{1}{6}$$

$$P(\geq) = \frac{7}{12}$$

Wird ein Arbeitnehmer bzw. eine Arbeitnehmerin zufällig herausgegriffen,
können die Anteile als Wahrscheinlichkeiten angesehen werden.



Gesucht sind $P(<\mid m)$, der Anteil an den Männern also, deren Gehalt weniger als 3000 € beträgt, und $P(\geq\mid w)$.

Löse die Aufgabe auch mit einer Vier-Felder-Tafel.

	m	w	*Summe*
$\geq$			$\frac{7}{12}$
$<$		$\frac{1}{6}$	
Summe		$\frac{1}{4}$	

↑ Pfaddiagramm und Vier-Felder-Tafel Lösungen

Wir verwenden die Abkürzungen:

m männlich
w weiblich
$\geq$ Gehalt beträgt mindestens 3000 €
$<$ Gehalt beträgt weniger als 3000 €

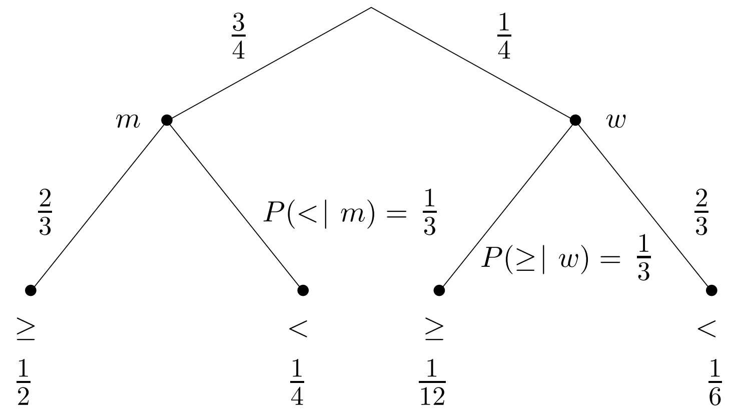
Die Anteile für einen Betrieb seien:

$P(w) = \frac{1}{4}$

$P(w \text{ und } <) = \frac{1}{6}$

$P(\geq) = \frac{7}{12}$

Wird ein Arbeitnehmer bzw. eine Arbeitnehmerin zufällig herausgegriffen,
können die Anteile als Wahrscheinlichkeiten angesehen werden.



$P(<|\ m) = \frac{1}{3}$

$P(\geq|\ w) = \frac{1}{3}$

Vier-Felder-Tafel:

	m	w	*Summe*
$\geq$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$
$<$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
Summe	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$P(<|\ m) = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$

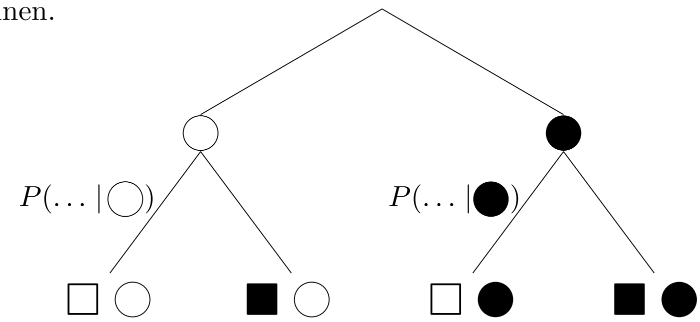
$P(\geq|\ w) = \frac{1}{12} : \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

↑ Vier-Felder-Tafel Pfaddiagramm

Bei 2 Merkmalen mit jeweils 2 Ausprägungen gibt es 4 Kombinationsmöglichkeiten, nach denen eine Aufteilung erfolgen kann, entweder in absoluten oder relativen Häufigkeiten.

	○	●	*Summe*
□	□ ○	□ ●	
■	■ ○	■ ●	
Summe			*Gesamtsumme*

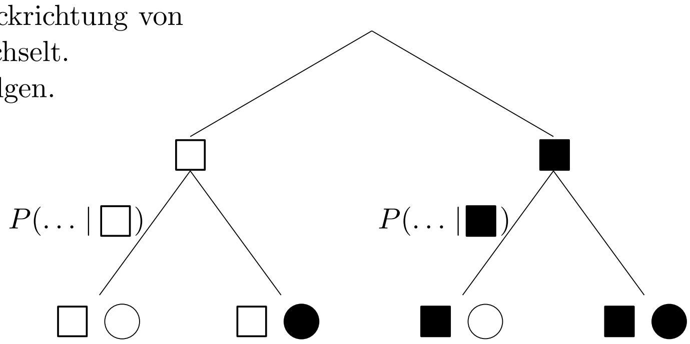
Die Vier-Felder-Tafel bietet einen Rahmen, um Anteile der Ausprägungskombinationen auf Anteile einer Teilmenge (Ellipse, waagerecht oder senkrecht) umzurechnen.



Sind diese Anteile an einer bestimmten Ausprägungsmenge gegeben, ist ein Pfaddiagramm empfehlenswert: die Anteile können direkt übernommen werden.
Die durch Multiplikation ermittelten Pfadanteile (-wahrscheinlichkeiten) füllen die Vier-Felder-Tafel.

	○	●	*Summe*
□	□ ○	□ ●	
■	■ ○	■ ●	
Summe			*Gesamtsumme*

Für Fragestellungen zur sogenannten bedingten Wahrscheinlichkeit (Umkehrung, Rückwärtsschließen) wird die Blickrichtung von senkrecht zu waagerecht bzw. umgekehrt gewechselt.
Dies kann ohne ein zweites Pfaddiagramm erfolgen.



↑ Vier-Felder-Tafel Unabhängigkeit

	A	$\overline{A}$	*Summe*
B	a	b	$a+b$
$\overline{B}$	c	d	$c+d$
Summe	$a+c$	$b+d$	$s=a+b+c+d$

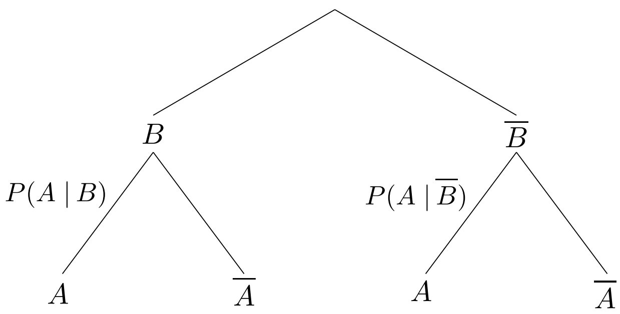
Wir bezeichnen mit $P(A \mid B)$ die Wahrscheinlichkeit von A unter der Annahme, dass B eingetroffen ist (bedingte Wahrscheinlichkeit).

A ist von B unabhängig, falls gilt:

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= P(A \mid \overline{B}) && \text{d. h.} \\ \frac{a}{a+b} &= \frac{c}{c+d} && \text{oder} \\ \frac{a}{c} &= \frac{b}{d} \end{aligned}$$

Zeige: Wenn A von B unabhängig ist, dann ist auch B von A unabhängig.

In einem Pfaddiagramm ist die Unabhängigkeit an gleichen Teilbäumen zu erkennen.



alternativ: A ist von B unabhängig, falls gilt:

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= P(A) && \text{d. h.} \\ \frac{a}{a+b} &= \frac{a+c}{s} && \text{oder} \\ \frac{a}{c} &= \frac{b}{d} \end{aligned}$$

↑ Vier-Felder-Tafel Unabhängigkeit allgemeine Definition

	A	$\overline{A}$	*Summe*
B	a	b	$a+b$
$\overline{B}$	c	d	$c+d$
Summe	$a+c$	$b+d$	$s=a+b+c+d$

Wir bezeichnen mit $P(A \mid B)$ die Wahrscheinlichkeit von A unter der Annahme, dass B eingetroffen ist (bedingte Wahrscheinlichkeit).

A ist von B unabhängig, falls gilt:

$$P(A \mid B) \;=\; P(A \mid \overline{B}) \qquad \text{d. h.}$$

$$\frac{a}{a+b} \;=\; \frac{c}{c+d} \qquad \text{oder}$$

$$\frac{a}{c} \;=\; \frac{b}{d}$$

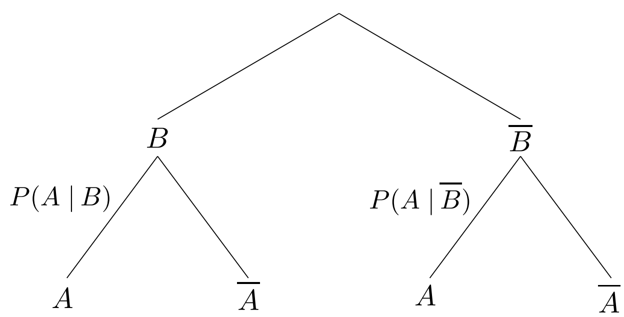
B ist dann auch unabhängig von A, die allgemeine Definition lautet:
A und B sind unabhängig, falls gilt: $P(A \cap B) \;=\; P(A) \cdot P(B)$

Erläutere die Definition für das 2malige Werfen eines Würfels und den Ereignissen:
A = „Im 1. Wurf eine 6."
B = „Im 2. Wurf eine 6."

Für eine Vier-Felder-Tafel bedeutet die Unabhängigkeit
$P(A \cap B) \;=\; P(A) \cdot P(B) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{s} \;=\; \frac{a+c}{s} \cdot \frac{a+b}{s}$

Zeige die Äquivalenz zu: $\quad \frac{a}{c} \;=\; \frac{b}{d}$

In einem Pfaddiagramm ist die Unabhängigkeit an gleichen Teilbäumen zu erkennen.



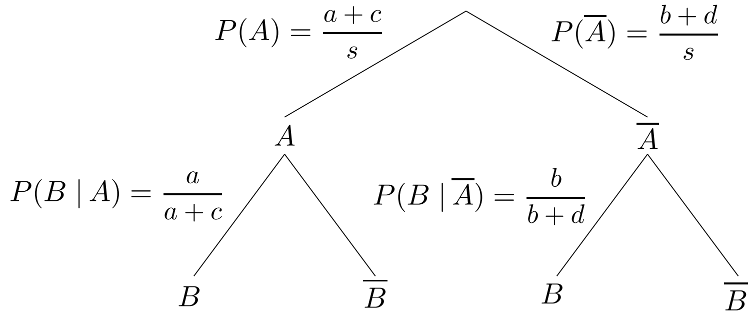
↑ Bedingte Wahrscheinlichkeit und Pfaddiagramm

	A	$\overline{A}$	*Summe*
B	a	b	$a+b$
$\overline{B}$	c	d	$c+d$
Summe	$a+c$	$b+d$	$s=a+b+c+d$

Wie wird die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A \mid B) = \frac{a}{a+b}$$

mit dem angegebenen Pfaddiagramm bestimmt?
(Aufgabenstellungen legen häufig derartige Diagramme mit Prozentangaben nahe.)



Erläutere und rechne nach:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})} = \ldots = \frac{a}{a+b}$$

↑ Test eines Medikaments

In einer Studie wurde ein Medikament getestet. Die Ergebnisse sind in der Tabelle dargestellt.

Dabei bedeuten:

M: Medikament erhalten
$\overline{M}$: Placebo erhalten
G: gesund geworden
$\overline{G}$: nicht gesund geworden

	G	$\overline{G}$	*Summe*
M	2000	500	2500
$\overline{M}$	400	1200	1600
Summe	2400	1700	4100

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) eine Person gesundet, von der man weiß, dass sie das Medikament erhalten hat,

b) eine Person nicht gesundet, da sie das Placebo erhalten hat,

c) eine gesund gewordene Person das Medikament nicht erhalten hat?

d) eine Testperson gesundet?

↑ Test eines Medikaments

In einer Studie wurde ein Medikament getestet. Die Ergebnisse sind in der Tabelle dargestellt.

Dabei bedeuten:

M: Medikament erhalten
$\overline{M}$: Placebo erhalten
G: gesund geworden
$\overline{G}$: nicht gesund geworden

	G	$\overline{G}$	*Summe*
M	2000	500	2500
$\overline{M}$	400	1200	1600
Summe	2400	1700	4100

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) eine Person gesundet, von der man weiß, dass sie das Medikament erhalten hat, $P(G\,|\,M) = \frac{2000}{2500} = 80{,}0\,\%$

b) eine Person nicht gesundet, da sie das Placebo erhalten hat, $P(\overline{G}\,|\,\overline{M}) = \frac{1200}{1600} = 75{,}0\,\%$

c) eine gesund gewordene Person das Medikament nicht erhalten hat? $P(\overline{M}\,|\,G) = \frac{400}{2400} = 16{,}7\,\%$

d) eine Testperson gesundet? $P = \frac{2400}{4100} = 58{,}5\,\%$

↑ Grippeimpfung

In einer Gruppe von 800 Personen haben sich 600 prophylaktisch gegen Grippe impfen lassen. Nach einer bestimmten Zeit wurde jedes Gruppenmitglied danach befragt, wer an einer Grippe erkrankte.

	K	$\overline{K}$	*Summe*
G	60	540	600
$\overline{G}$	120	80	200
Summe	180	620	800

Dabei bedeuten:

G: Person ist geimpft
K: Person ist erkrankt

Berechnen Sie:

a) $P(G)$

b) $P(G \cap K)$

c) $P(K \mid \overline{G})$

d) $P(G \mid K)$

Die Hälfte aller Studierenden einer Seminargruppe ist höchstens 1,75 m groß, davon sind 60 % Frauen. 45 % aller Studierenden dieser Seminargruppe sind Männer. Ermitteln Sie den Anteil der Studierenden dieser Seminargruppe, die Männer und zugleich größer als 1,75 m sind.

Der Arzt nach der Untersuchung zu seinem Patienten: „Also, die Lage ist ziemlich ernst. Sie sind sehr krank. Statistisch gesehen überleben 9 von 10 Menschen diese Krankheit nicht.“ Der Patient erbleicht. „Sie haben aber Glück“, beruhigt ihn der Arzt. „Ich hatte schon neun Patienten mit den gleichen Symptomen, und die sind alle verstorben.“

Vier-Felder-Tafel
Startseite