Scheitel, Nullstellen und Schnittpunkte

1. Gegeben ist die Parabel $y = x^2 - 5x$

   und die Gerade $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

   a) Bestimme den Scheitel und die Nullstellen der Parabel.

   b) Zeichne die Parabel und die Gerade in dasselbe Koordinatensystem.

   c) Bestimme die x- und y-Koordinaten der Schnittpunkte von Gerade und Parabel.

Scheitel, Nullstellen und Schnittpunkte

1. Gegeben ist die Parabel $y = x^2 - 5x$

   und die Gerade $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

   a) Bestimme den Scheitel und die Nullstellen der Parabel.

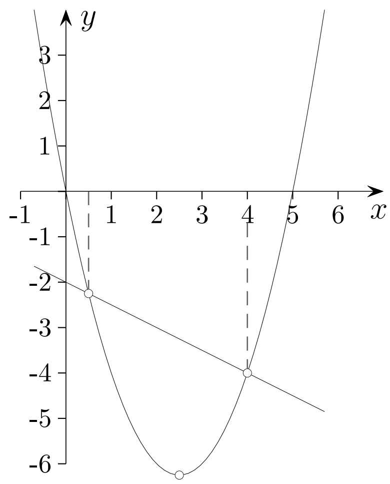
   b) Zeichne die Parabel und die Gerade in dasselbe Koordinatensystem.

   c) Bestimme die x- und y-Koordinaten der Schnittpunkte von Gerade und Parabel.

Scheitel der Parabel:
Um den Scheitel erkennen zu können, stellen wir die Scheitelform auf:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 5x & &\mid +(\tfrac{5}{2})^2 \\ y + \tfrac{25}{4} &= x^2 - 5x + (\tfrac{5}{2})^2 \\ y + \tfrac{25}{4} &= (x - \tfrac{5}{2})^2 & &\mid -\tfrac{25}{4} \\ y &= (x - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{25}{4} & &\mathit{Scheitel:}\ Min(\tfrac{5}{2} \mid -\tfrac{25}{4}) \end{aligned}$$

Weil die Parabel nach oben geöffnet ist, liegt ein Minimum vor.



Nullstellen der Parabel:
In den Nullstellen ist die y-Koordinate Null.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 5x \\ 0 &= x(x - 5) \\ & x_1 = 0 \qquad x_2 = 5 \end{aligned}$$

Nullstellen: $N_1(0 \mid 0)$, $N_2(5 \mid 0)$

Schnittpunkte von Parabel und Gerade:
In den Schnittpunkten stimmen die y-Koordinaten von Parabel und Gerade überein.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x &= -\tfrac{1}{2}x - 2 \\ &\vdots \\ x^2 - \tfrac{9}{2}x + 2 &= 0 \\ x_{1,2} &= \tfrac{9}{4} \pm \sqrt{\tfrac{81}{16} - 2} \\ &= \tfrac{9}{4} \pm \sqrt{\tfrac{81-32}{16}} \\ &= \tfrac{9}{4} \pm \sqrt{\tfrac{49}{16}} \\ &= \tfrac{9}{4} \pm \tfrac{7}{4} \qquad x_1 = 4 \qquad x_2 = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

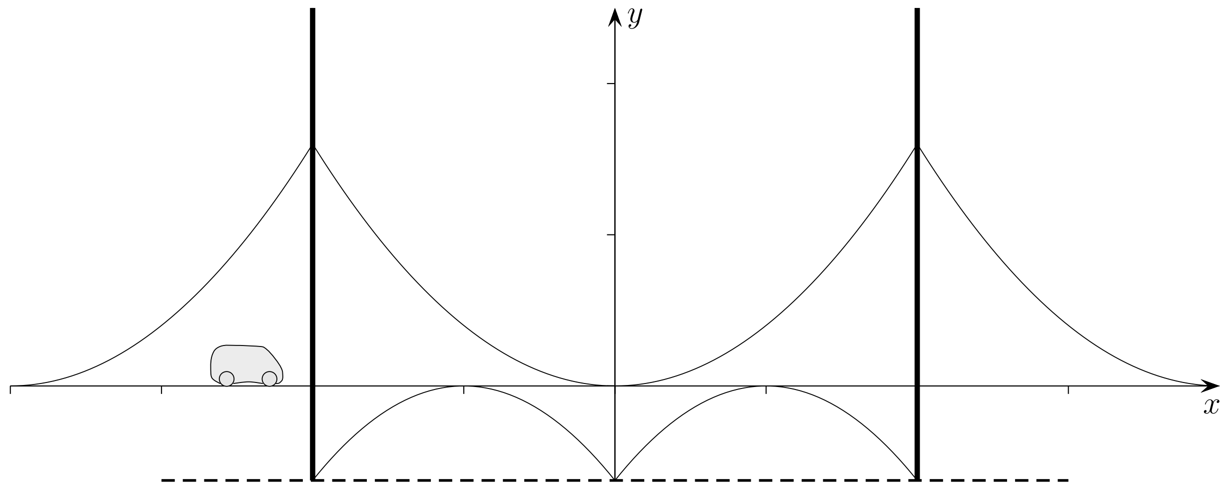
Die y-Werte ergeben sich durch Einsetzen der x-Werte in die Geraden- (oder Parabel-) Gleichung.

Schnittpunkte: $A(4 \mid -4)$, $B(\frac{1}{2} \mid -\frac{9}{4})$

2. Aufgabenstellung wie in 1.

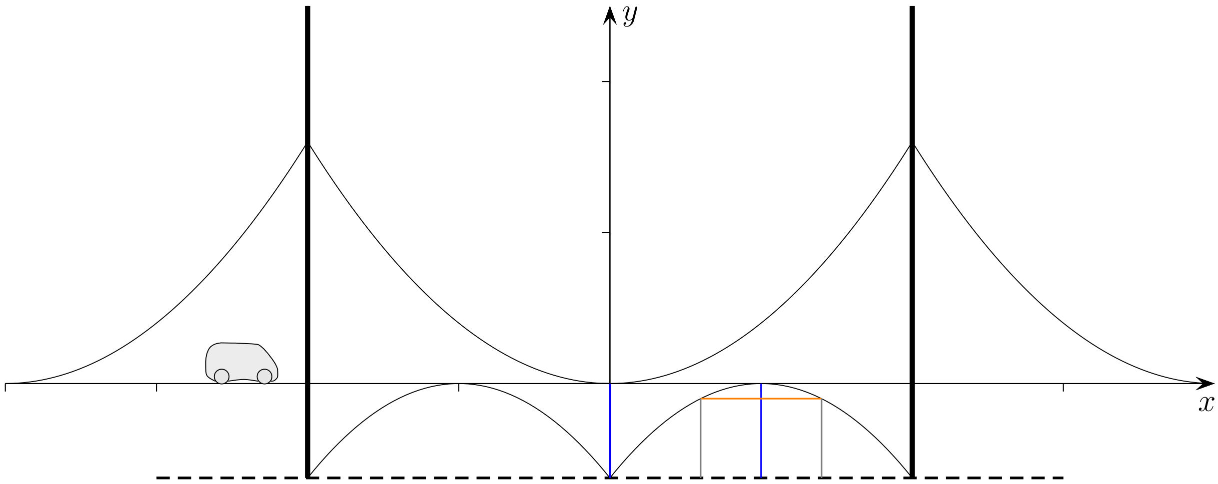
   $f(x) = -x^2 - 5x$

   $y = -\frac{1}{2}x + 2$



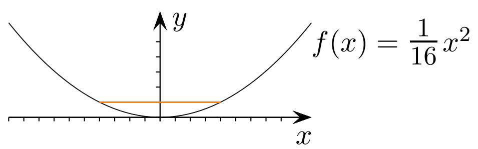
Die beiden Bögen unterhalb der Fahrbahn einer Brücke bilden jeweils eine Parabel mit der Gleichung $g_\ell = -\frac{1}{16}(x+10)^2$ bzw. $g_r = -\frac{1}{16}(x-10)^2$.

Ermittle, wie breit ein 5,25 m hohes Schiff maximal sein darf, damit es gerade noch unter eines der Bögen mittig hindurchfahren kann.



Die beiden Bögen unterhalb der Fahrbahn einer Brücke bilden jeweils eine Parabel mit der Gleichung $g_\ell = -\frac{1}{16}(x+10)^2$ bzw. $g_r = -\frac{1}{16}(x-10)^2$.

Ermittle, wie breit ein 5,25 m hohes Schiff maximal sein darf, damit es gerade noch unter eines der Bögen mittig hindurchfahren kann.



$g_r(0) = 6{,}25$ Die Wasseroberfläche liegt 6,25 m unterhalb der Fahrbahn.

$$\begin{aligned} 6{,}25 - 5{,}25 &= 1 \\ \frac{1}{16}x^2 &= 1 \qquad |\, g_r \text{ wurde verschoben und gespiegelt, Ergebnis } f. \\ x_1 &= 4 \\ x_2 &= -4 \end{aligned}$$

Die maximale Breite des Schiffs beträgt 8 m.