1. Quadratische Gleichung
2. pq-Formel
3. Quadratische Gleichung Typen
4. Quadratische Gleichung Übung
5. Probe nach Vieta
6. Quadratische Gleichung, al-Khwarizmi
7. Quadratische Gleichung $x^2 + ax = b$

↑ Quadratische Gleichung

Steht in einer Gleichung auf der einen Seite eine Null, so sehen wir zunächst nach, ob x oder eine Potenz von x (x^2, x^3, …) ausgeklammert werden kann. Die größtmögliche Potenz von x, die in *jedem* Summanden enthalten ist, klammern wir aus. Es entsteht ein Produkt.

$$\begin{aligned} x^2+3x &= 0 \\ x(x+3) &= 0 \\ x_1=0\,; &\qquad x_2=-3 \end{aligned}$$

Wenn ein Produkt Null ergeben soll,
so muss mindestens ein Faktor Null ergeben.

$$\begin{aligned} 2x^3-5x^2 &= 0 \\ x^2(2x-5) &= 0 \\ x_1=0\,; &\qquad x_2=\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Die einzelnen Faktoren sind daher zu untersuchen, für welche x sie Null ergeben.

Liegt eine Gleichung in der Form $(x-3)(2x+5)=0$ vor, so kann die Lösung sofort angegeben werden:

$$x_1=3\,;\quad x_2=-\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}x^4+x^3 &= 0 \\ x^3(-\frac{1}{4}x+1) &= 0 \\ x_1=0\,; &\qquad x_2=4 \end{aligned}$$

Etwas schwieriger ist eine Gleichung zu lösen, falls nicht ausgeklammert werden kann, weil ein Summand ohne x vorhanden ist, wie z.B. in

$$x^2+6x-7=0$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der quadratischen Ergänzung auf die Form $(x+3)^2=16$ gebracht werden. Da auf der rechten Seite eine 16 steht, müssen $x+3=4$ oder $x+3=-4$ sein. Daraus ergeben sich die beiden Lösungen $x_1=1$ und $x_2=-7$.

$$\begin{aligned} x^2+6x-7 &= 0 \quad |+7 \\ x^2+6x &= 7 \quad |+9 \\ x^2+6x+9 &= 16 \\ (x+3)^2 &= 16 \\ x_1+3=4\,; &\qquad x_2+3=-4 \\ x_1=1\,; &\qquad x_2=-7 \end{aligned}$$

Schreibt man dieses Verfahren allgemein für

$$x^2+px+q=0$$

auf, so ergibt sich eine Formel zum Lösen quadratischer Gleichungen, die sogenannte *pq-Formel*.

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Beispiel: $x^2-8x+12=0$ Hier ist $p=-8$ und $q=12$.
Es gibt eine einfache Merkregel, um die Formel anzuwenden:

- Zahl vor x (hier -8) durch 2 teilen und Vorzeichen umkehren
- Ergebnis (hier 4) quadrieren und unter die Wurzel schreiben
- Vorzeichen der Zahl (hier 12) wechseln und unter die Wurzel schreiben

$$\begin{aligned} x^2-8x+12 &= 0 \\ x_{1,2} &= 4\pm\sqrt{16-12} \\ x_{1,2} &= 4\pm 2 \\ x_1=6\,; &\qquad x_2=2 \end{aligned}$$

Einfache Probe für das Ergebnis $x_1=6;\ \ x_2=2$:
Es ist $x_1\cdot x_2=12$ und $x_1+x_2=8$, stets gilt: $x_1\cdot x_2=q$ und $x_1+x_2=-p$

Übung:

a) $x^2-4x-5=0$ b) $x^2-3x-10=0$

c) $2x^2-3x-5=0$ d) $x^2-7x=0$

e) $\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{2}x=0$ f) $ax^2+bx+c=0$

Die pq-Formel kann nur auf die Normalform $x^2+px+q=0$ angewendet werden. Falls die Gleichung z.B. mit $3x^2$ beginnt, so ist die Gleichung durch 3 zu teilen.

Beachte: $\frac{4}{3}:2=\frac{\cancel{4}^{2}}{3\cdot\cancel{2}_{1}}=\frac{2}{3}$

↑ Quadratische Gleichung

Übung:

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$ b) $x^2 - 3x - 10 = 0$

c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ d) $x^2 - 7x = 0$

e) $\frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x = 0$ f) $ax^2 + bx + c = 0$

Lösungen:

a) $x_1 = 5$; $x_2 = -1$ b) $x_1 = 5$; $x_2 = -2$

c) $x_1 = \frac{5}{2}$; $x_2 = -1$ d) $x_1 = 0$; $x_2 = 7$

e) $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 2$ f) $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

↑ pq-Formel

$$
\begin{aligned}
x^2+6x-7 &= 0 \qquad \mid +7\\
x^2+6x &= 7 \qquad \mid +9\\
x^2+6x+9 &= 16\\
(x+3)^2 &= 16\\
x_1+3=4\,; &\qquad x_2+3=-4\\
x_1=1\,; &\qquad x_2=-7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2+6x-7 &= 0 \qquad \mid +7\\
x^2+6x &= 7 \qquad \mid +\left(\tfrac{6}{2}\right)^2\\
x^2+6x+\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 &= \left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7\\
\left(x+\frac{6}{2}\right)^2 &= \left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7\\
x_{1/2}+\frac{6}{2} &= \pm\sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7}\\
x_{1/2} &= -\frac{6}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2+px+q &= 0\\
x_{1/2} &= -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-q}
\end{aligned}
$$

Vorzeichen umkehren

$$x^2+6x-7 = 0$$

durch 2 teilen und
Vorzeichen umkehren

$$x_{1/2} = -\frac{6}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7}$$

quadrieren (negatives Vorzeichen fällt weg)

Statt $\frac{6}{2}$ solltest du 3 schreiben:

$$
\begin{aligned}
x_{1/2} &= -3\pm\sqrt{9+7}\\
&= -3\pm 4\\
x_1 &= 1,\ \ x_2=-7
\end{aligned}
$$

↑

↑ Quadratische Gleichung Typen

Typ 1

$x^2 - 3 = 0$ Zwischenschritt(e): Gleichung nach x^2 umstellen.

$x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

Typ 2

$x(x-3) = 0$ Lösungen sind ohne Rechnung erkennbar.

Die Gleichung könnte auch in der Form $x^2 - 3x = 0$ vorliegen.

$x_1 = 0;\ x_2 = 3$

Typ 3

$x(x-2) = 3$ Nur hier ist die pq-Formel erforderlich.

Zwischenschritt: $x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 = -1;\ x_2 = 3$

Typ 4

$(x-5)^2 = 9$ Ratsam ist, die Klammern nicht aufzulösen,

die pq-Formel ist nicht erforderlich.

Zwischenschritt: $x - 5 = \pm 3$

$x_1 = 8;\ x_2 = 2$

↑ Quadratische Gleichung Übung

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$
2. $x^2 + 3x - 28 = 0$
3. $x^2 + 6x = 0$
4. $3x^2 + 4x + 1 = 0$
5. $6x^2 - x = 1$
6. $x^2 - x - 6 = 0$
7. $x^2 + 9x + 20 = 0$
8. $x^2 - 5x = 0$
9. $3x^2 + 2x = 0$
10. $(x - 1)^2 = 16$
11. $(x + 4)^2 = 2$

↑ Quadratische Gleichung Übung

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$
2. $x^2 + 3x - 28 = 0$
3. $x^2 + 6x = 0$
4. $3x^2 + 4x + 1 = 0$
5. $6x^2 - x = 1$
6. $x^2 - x - 6 = 0$
7. $x^2 + 9x + 20 = 0$
8. $x^2 - 5x = 0$
9. $3x^2 + 2x = 0$
10. $(x-1)^2 = 16$
11. $(x+4)^2 = 2$

Lösungen

1. $6;\ 2$
2. $4;\ -7$
3. $0;\ -6$
4. $-1;\ -\frac{1}{3}$
5. $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}$
6. $3;\ -2$
7. $-4;\ -5$
8. $0;\ 5$
9. $0;\ -\frac{2}{3}$
10. $5;\ -3$
11. $-4 \pm \sqrt{2}$

↑ Quadratische Gleichung, Probe nach Vieta

Die quadratische Gleichung

$$x^2 \; -8\,x \; +12 = 0$$

hat die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

$$x^2 \; +2\,x \; -15 = 0$$

hat die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -5$.
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Lösungen und den Zahlen in der Gleichung?

Wir vermuten, dass für

$$x^2 + p\,x \; + q \; = 0$$

$$\begin{aligned} q &= x_1 \cdot x_2 \\ p &= -(x_1 + x_2) \qquad \text{gilt.} \end{aligned}$$

Zur Begründung rechnen wir aus und vergleichen:

$$\begin{aligned} x^2 + p\,x \; + q \; &= 0 \\ (x - x_1)(x - x_2) &= 0 \\ \cdots \\ x^2 - (x_1 + x_2)\,x \; + x_1 \cdot x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Überprüfe, ob x_1 und x_2 die Gleichung lösen und korrigiere gegebenenfalls.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ $\qquad x_1 = 3,\; x_2 = 5$

b) $x^2 + 4x - 21 = 0$ $\qquad x_1 = -3,\; x_2 = 7$

c) $x^2 + 6x + 8 \;= 0$ $\qquad x_1 = 2,\; x_2 = 4$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ $\qquad x_1 = -2,\; x_2 = 5$

e) $x^2 - 5x - 6 \;= 0$ $\qquad x_1 = -2,\; x_2 = -3$

↑ Quadratische Gleichung, Probe nach Vieta

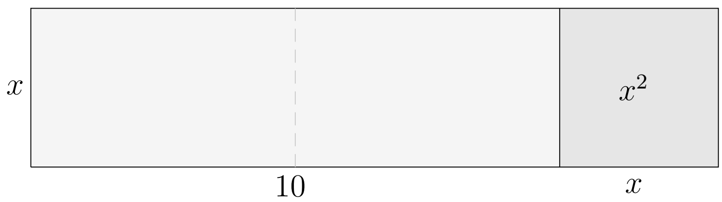
Überprüfe, ob x_1 und x_2 die Gleichung lösen und korrigiere gegebenenfalls.

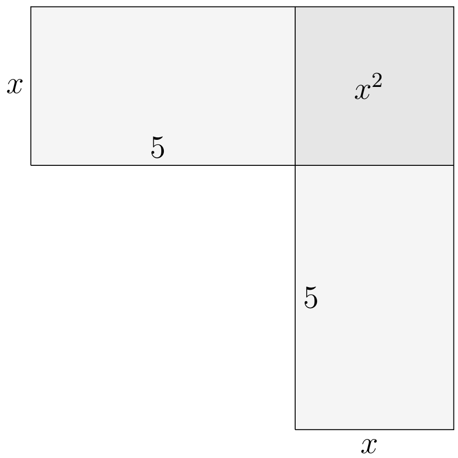
a)	$x^2 - 8x + 15 = 0$	$x_1 = 3,\ x_2 = 5$	richtig
b)	$x^2 + 4x - 21 = 0$	$x_1 = -3,\ x_2 = 7$	falsch, richtig wäre $x_1 = 3,\ x_2 = -7$
c)	$x^2 + 6x + 8 = 0$	$x_1 = 2,\ x_2 = 4$	falsch, richtig wäre $x_1 = -2,\ x_2 = -4$
d)	$x^2 - 3x - 10 = 0$	$x_1 = -2,\ x_2 = 5$	richtig
e)	$x^2 - 5x - 6 = 0$	$x_1 = -2,\ x_2 = -3$	falsch, richtig wäre $x_1 = -1,\ x_2 = 6$

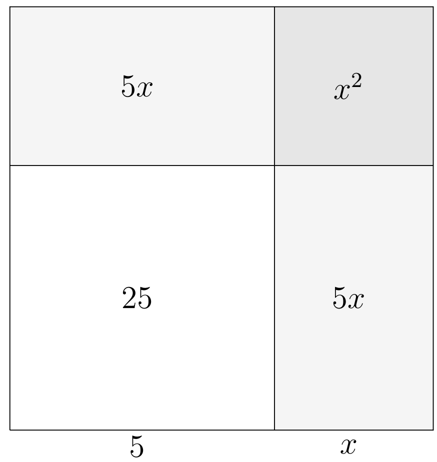
↑ Quadratische Gleichung

Der um 800 n. Chr. in Bagdad lebende Gelehrte al-Khwarizmi entwickelte Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen.

Betrachten wir $x^2 + 10x = 39$. Eine solche Gleichung beschreibt die unbekannte Lösung x.
Wir skizzieren ein Quadrat der Seitenlänge x, um x^2 zu repräsentieren, sowie ein Rechteck der Seitenlängen 10 und x für den Term $10x$. Die Gesamtfläche stellt 39 dar. Die Größe der Vierecke ist unerheblich, wir verlassen uns nur auf die Beschriftung. Die Idee ist nun, das Rechteck zu halbieren und die linke Hälfte gemäß der unteren Skizze zu platzieren.







Die Anordnung wird zu einem Quadrat mit der Seitenlänge $5 + x$ ergänzt.
Dabei entsteht ein kleineres Quadrat mit dem Inhalt 25.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(5+x)^2 &= 25 + \underbrace{5x + 5x + x^2}_{10x + x^2 = 39} \\
(5+x)^2 &= 64 \\
5 + x &= 8 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

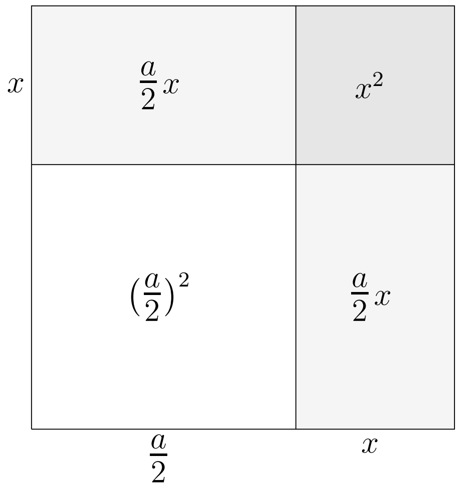
Die negative Lösung $x = -13$ wurde von al-Khwarizmi nicht betrachtet.

Finde für $x^2 + 4x = 77$ eine Lösung.

Finde für $x^2 + 4x = 77$ eine Lösung. $\quad x = 7$

Allgemein:

$x^2 + ax = b$



Es gilt:

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \underbrace{\frac{a}{2}x + \frac{a}{2}x + x^2}_{ax + x^2 = b}$$

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$$

$$\frac{a}{2} + x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$

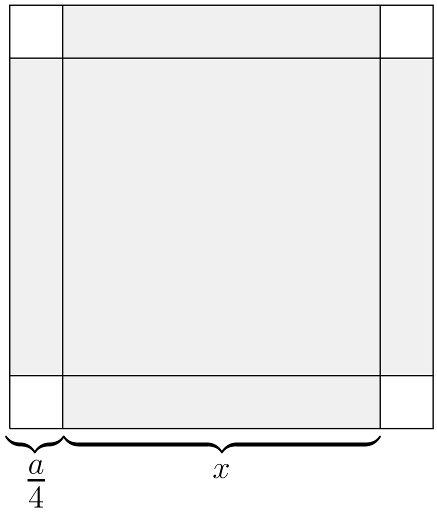
Im 16. Jh. wurde die Lösungsformel ergänzt:

$$\begin{aligned} x^2 + ax &= b \\ x_{1/2} &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \end{aligned}$$

Hierzu gleichwertig ist die Schreibweise:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

↑ Quadratische Gleichung $\quad x^2 + ax = b$



al-Khwarizmi fand für die grau gefärbte Fläche mit dem Inhalt b
(1 Quadrat, 4 Rechtecke) die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
x^2 + ax &= b \qquad\qquad\qquad | \; b = x^2 + 4 \cdot \frac{a}{4} \cdot x \\
\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 &= b + 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 \\
x &= \sqrt{b + 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2} - \frac{a}{2} \\
x &= -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}
\end{aligned}$$