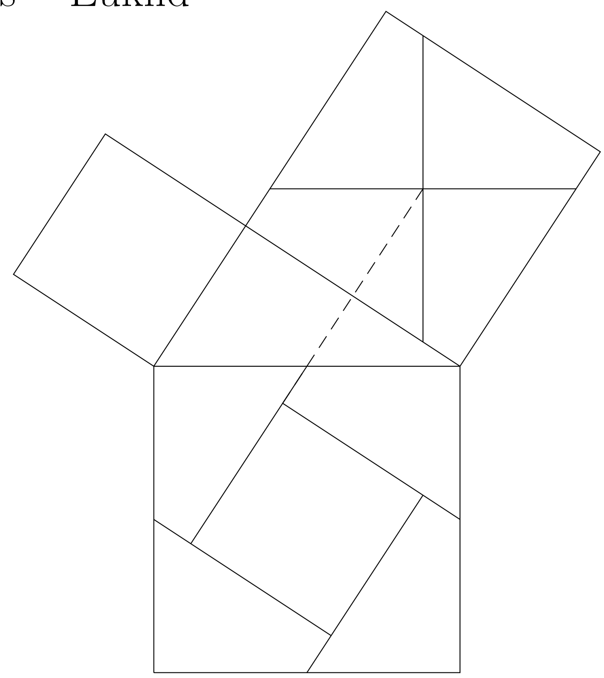
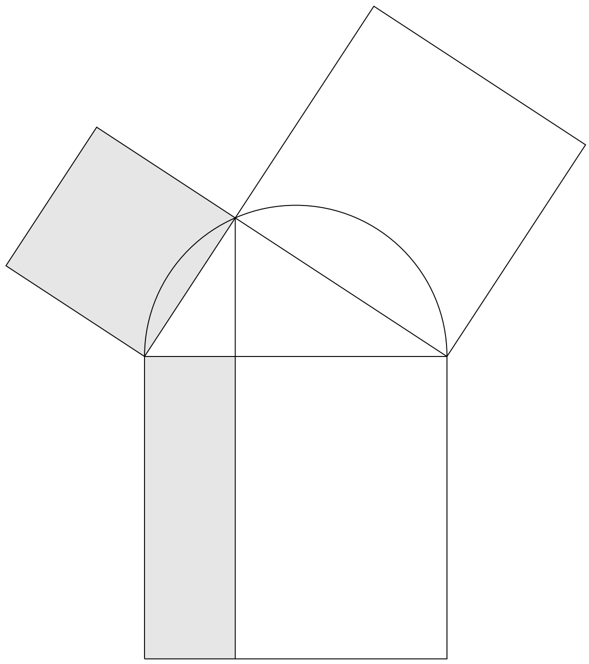
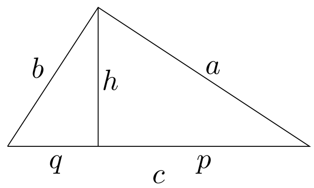
Pythagoras Euklid

↑ Pythagoras Euklid





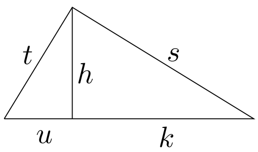


$a^2 + b^2 = c^2$ *Satz des Pythagoras*

$h^2 = q \cdot p$ *Höhensatz*

$a^2 = p \cdot c$ *Kathetensatz des Euklid*

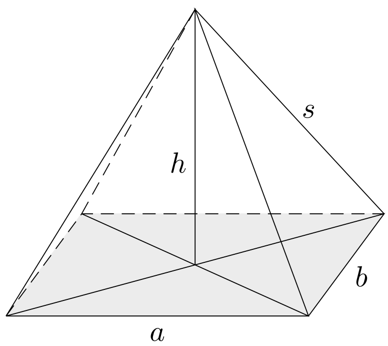
$b^2 = q \cdot c$



1. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind zwei Längen (in *cm*) gegeben, berechne die übrigen:

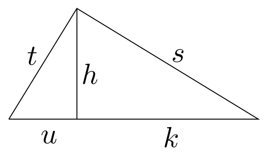
   a) $s = 10,\ k = 6$

   b) $u = 6,\ k = 9$



2. Von einer senkrechten Pyramide mit rechteckiger Grundfläche sind gegeben: $a,\ b,\ h$.
   Gesucht ist s. *(Vereinfache das Ergebnis.)*

↑ Pythagoras Euklid



1. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind zwei Längen (in cm) gegeben, berechne die übrigen:

   a) $s = 10,\ k = 6$

   b) $u = 6,\ k = 9$

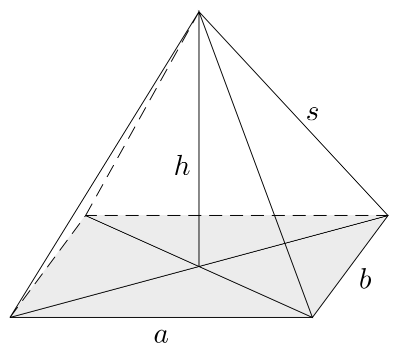
a) $h = 8,\ u = \dfrac{32}{3}, t = \dfrac{40}{3}$

$$
\begin{aligned}
h &= \sqrt{s^2 - k^2} \\
&= \sqrt{100 - 36} = 8 \\
s^2 &= k \cdot c \qquad (\textit{Hypotenuse } c) \\
c &= \frac{s^2}{k} \qquad = \frac{50}{3} \\
u &= c - k \qquad = \frac{32}{3} \\
t^2 &= u \cdot c \\
t &= \sqrt{u \cdot c} \qquad = \frac{40}{3}
\end{aligned}
$$

b) $h = \sqrt{54},\ t = \sqrt{90},\ s = \sqrt{135}$

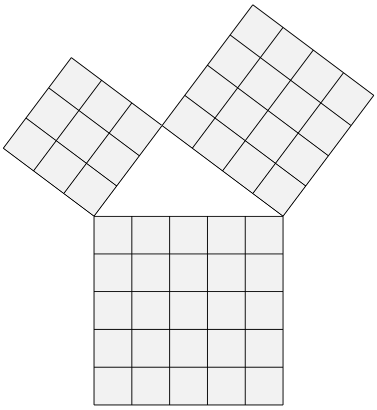
$$
\begin{aligned}
h^2 &= u \cdot k \\
h &= \sqrt{54} \\
t &= \sqrt{h^2 + u^2} \\
&= \sqrt{54 + 36} = \sqrt{90} \\
s &= \sqrt{h^2 + k^2} \\
&= \sqrt{54 + 81} = \sqrt{135}
\end{aligned}
$$

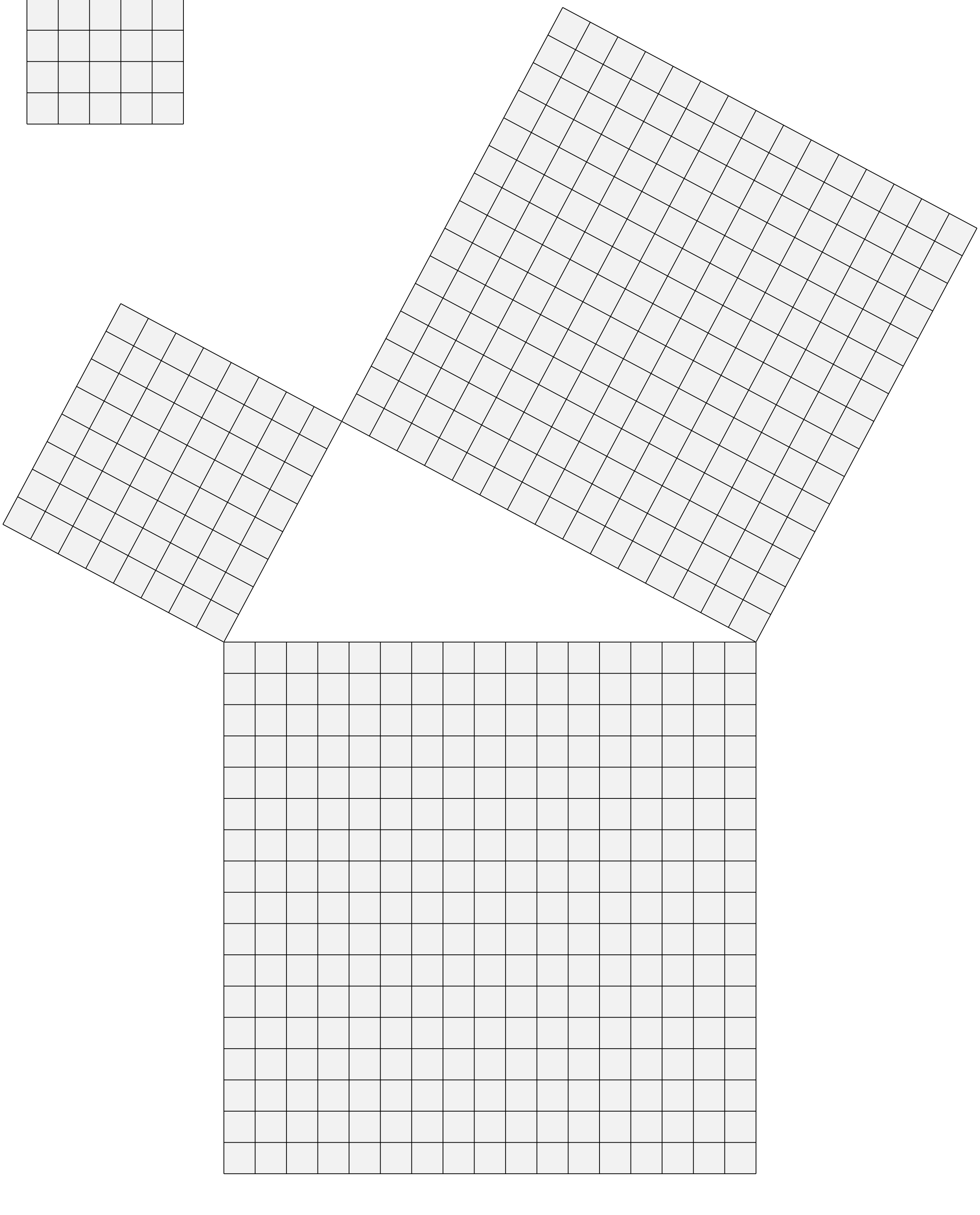
2. Von einer senkrechten Pyramide mit rechteckiger Grundfläche sind gegeben: $a,\ b,\ h$.
   Gesucht ist s. *(Vereinfache das Ergebnis.)*



$$
\begin{aligned}
s &= \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^2} \\
&= \ldots = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

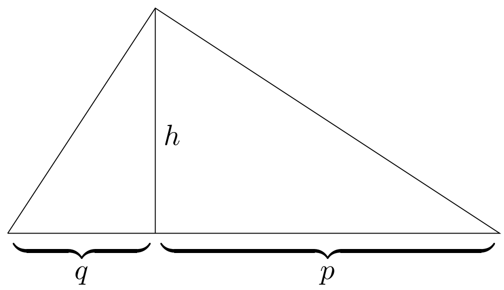
↑ Pythagoras

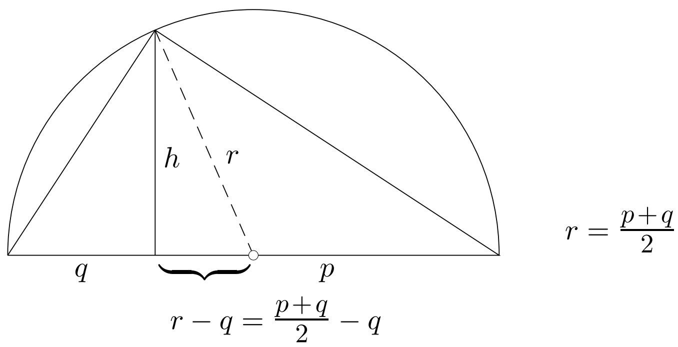




↑ Höhensatz

Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Hypotenusenabschnitte q und p gegeben, gesucht ist die Höhe h.



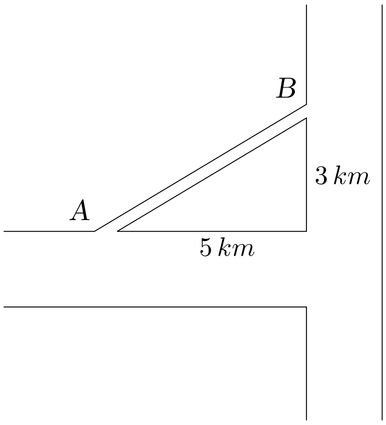


$$
\begin{aligned}
h^2 &= \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p+q}{2} - q\right)^2 \\
&\;\;\dots \\
&= \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 \\
&\;\;\dots \\
h^2 &= p \cdot q
\end{aligned}
$$

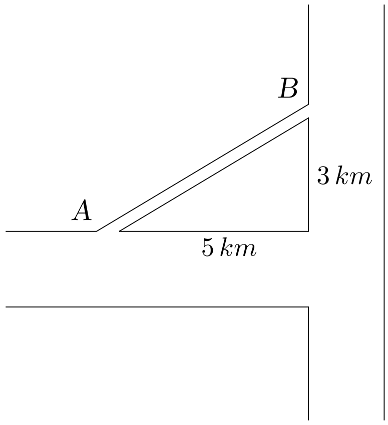
oder kürzer:

$$
\begin{aligned}
h^2 &= r^2 - (r-q)^2 \\
&\;\;\dots \\
&= (p+q)\,q - q^2 \\
h^2 &= p \cdot q
\end{aligned}
$$

Viele Autofahrer benutzen für die Fahrt von A nach B nicht die stark befahrenen Hauptstraßen, sondern die Abkürzung. Bringt die Abkürzung eine Zeitersparnis, wenn man auf der Abkürzung durchschnittlich 30 km/h und auf den Hauptstraßen durchschnittlich mit 50 km/h fahren kann?
Bei welcher Geschwindigkeit auf der Abkürzung sind die Fahrzeiten gleich?



Viele Autofahrer benutzen für die Fahrt von A nach B nicht die stark befahrenen Hauptstraßen, sondern die Abkürzung. Bringt die Abkürzung eine Zeitersparnis, wenn man auf der Abkürzung durchschnittlich 30 km/h und auf den Hauptstraßen durchschnittlich mit 50 km/h fahren kann?
Bei welcher Geschwindigkeit auf der Abkürzung sind die Fahrzeiten gleich?



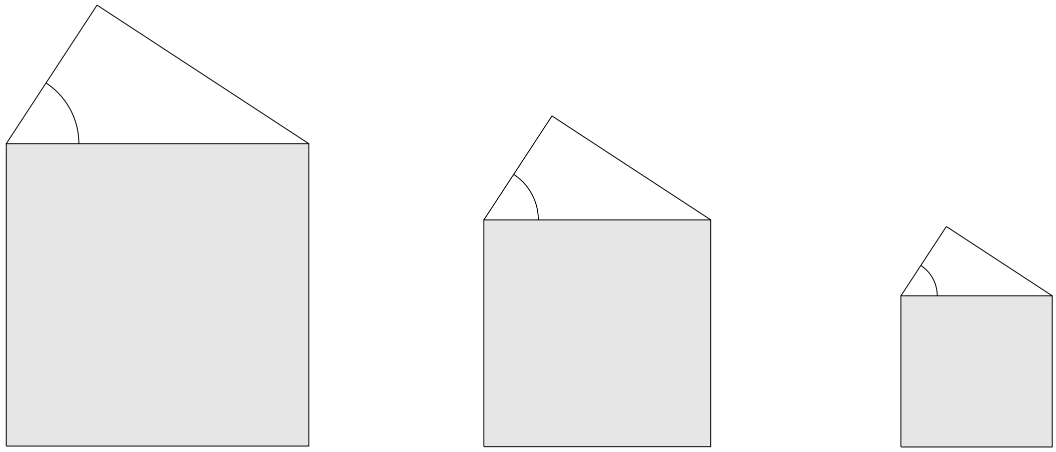
$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Hauptstraße: $t_1 = \frac{8}{50} \; = \; 0{,}16 \; (h)$

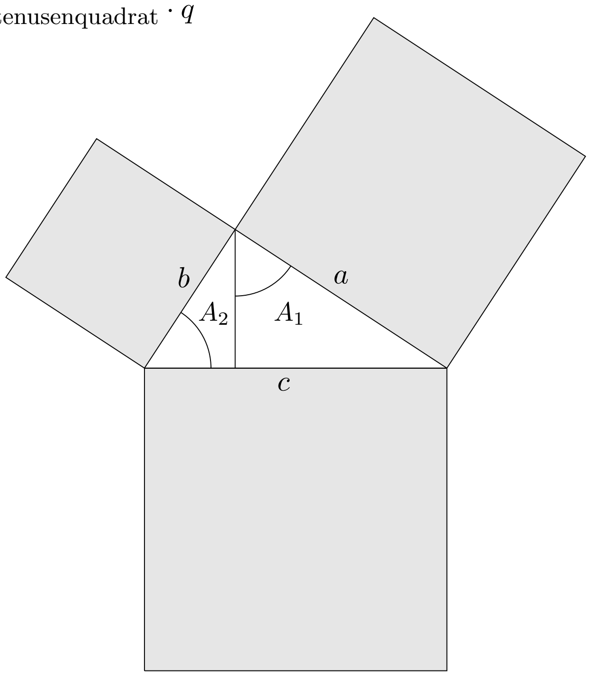
Abkürzung: $t_2 = \frac{\sqrt{34}}{30} \; = \; 0{,}19 \; (h)$

Zeitgleichheit für: $\frac{\sqrt{34}}{v} = \frac{8}{50} \implies v = 36{,}4 \; (\frac{km}{h})$



Die Figuren sind ähnlich.
Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist durch den Winkel und die Hypotenuse festgelegt und ist ein jeweils gleicher Anteil q des Hypotenusenquadrats. Man stelle sich vor, die Figur wird doppelt (dreifach) so groß gezeichnet.

$$A_{\text{Dreieck}} = A_{\text{Hypotenusenquadrat}} \cdot q$$

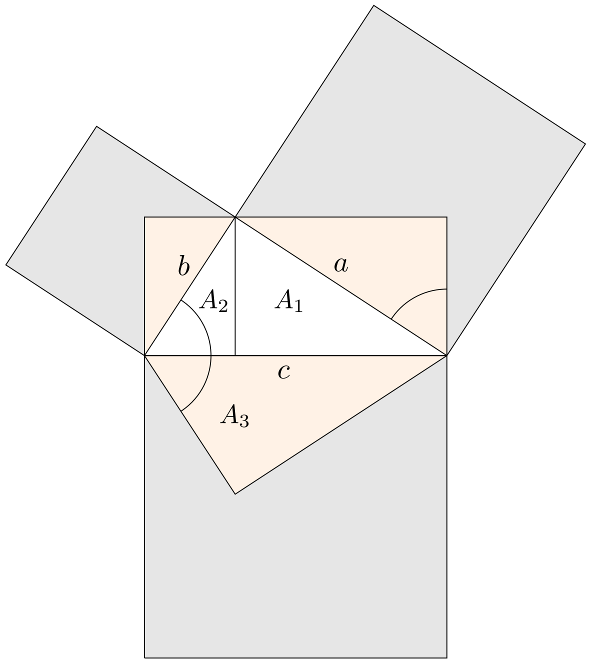


Das Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c ist rechtwinklig (Voraussetzung), die eingezeichneten Winkel daher gleich groß (Schenkel verlaufen paarweise senkrecht zueinander).
In dieser Figur sind drei ähnliche Dreiecke mit den Hypotenusen a, b und c enthalten.
Für die Teildreiecke gilt nach der obigen Überlegung:

$$A_1 + A_2 = a^2 \cdot q + b^2 \cdot q = A_{\text{gesamt}} = c^2 \cdot q$$

Division mit q beendet den Beweis.
Die Überlegung zeigt, dass statt der Quadrate auch z. B. Halbkreise verwendet werden könnten.

↑ Pythagoras Beweis



Für den Ähnlichkeitsnachweis der Dreiecke ist das eingezeichnete Rechteck hilfreich.
Es ermöglicht eine leicht veränderte Betrachtungsweise.

Die Quadrate mit den innenliegenden Dreiecken sind ähnliche Figuren.
Für diese Quadrate gilt

$$A_{\text{Quadrat}} = A_{\text{Dreieck}} \cdot k$$

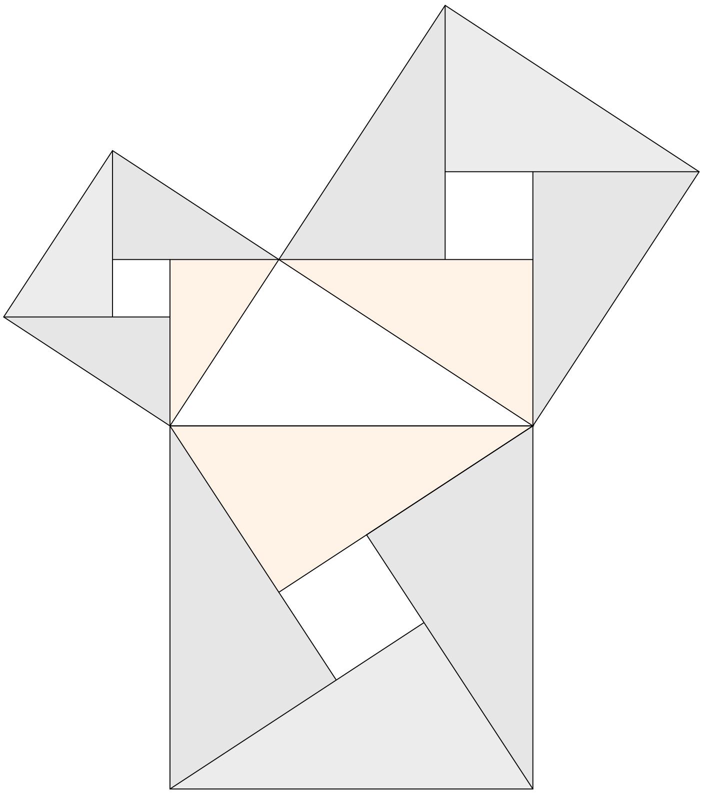
Mit

$$A_1 + A_2 = A_3$$

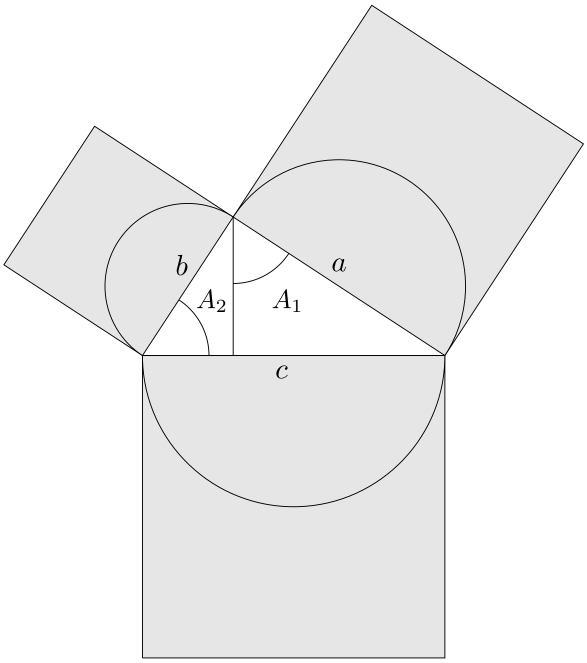
erhalten wir $a^2 + b^2 = c^2$.

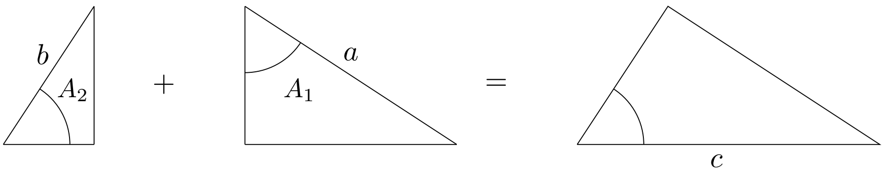
Für welchen Fall gilt $k = 4$?

Nur für ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist $k = 4$,
ansonsten ist wegen der mittigen quadratischen Lücken $k > 4$.

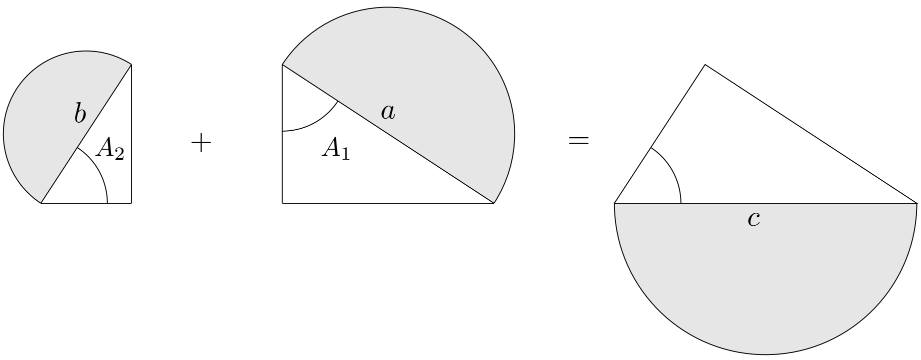


↑ Pythagoras verallgemeinert

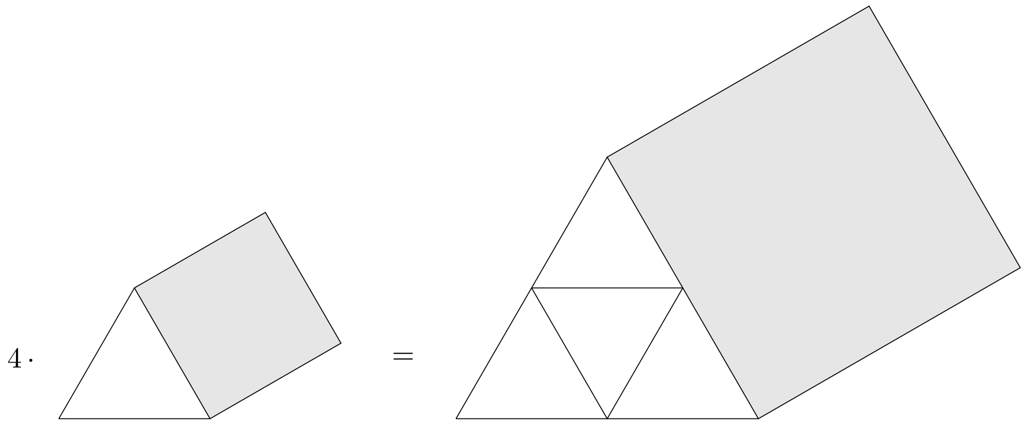


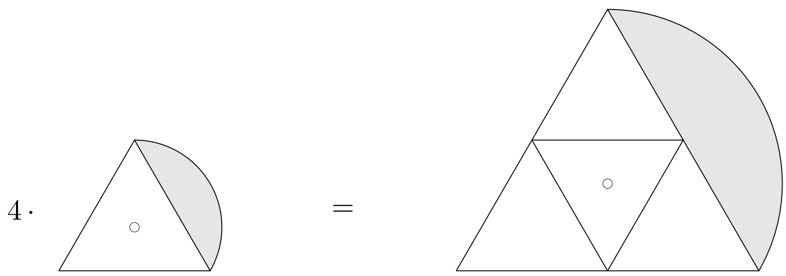


Das Wesentliche am Satz des Pythagoras ist, dass bei der Zerlegung eines Dreiecks alle Dreiecke ähnlich sind. Werden die einzelnen Figuren z. B. mit Quadraten oder Halbkreisen unter Aufrechterhaltung der Ähnlichkeit ergänzt, so bleibt die Summenbeziehung für die Ergänzungen (und für die gesamten Figuren) erhalten.



↑ Ähnliche Figuren

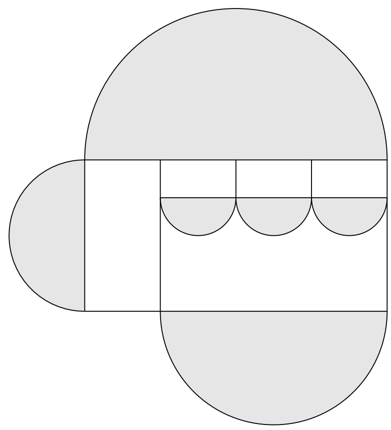




Die gleichseitigen Dreiecke wurden mit einem Quadrat bzw. mit einem Segment des Umkreises ergänzt. Der Inhalt der großen Ergänzung ist das Vierfache der kleinen.

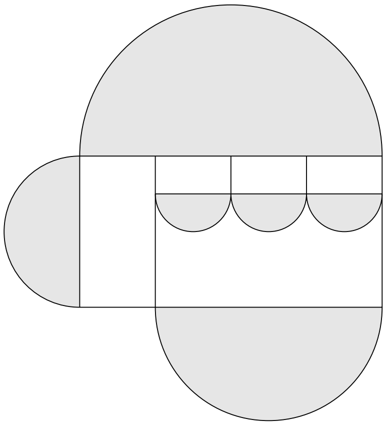
2. Begründung: Wird eine Fläche maßstäblich mit dem Faktor k vergrößert (verkleinert), so ändert sich der Inhalt mit dem Faktor k^2.

Unmittelbar zu sehen:
Der Inhalt des größten Halbkreises ist die Summe der Inhalte der kleineren Halbkreise.



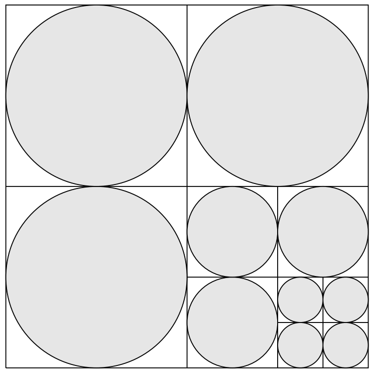
↑ Ähnliche Figuren

Unmittelbar zu sehen:
Der Inhalt des größten Halbkreises ist die Summe der Inhalte der kleineren Halbkreise.



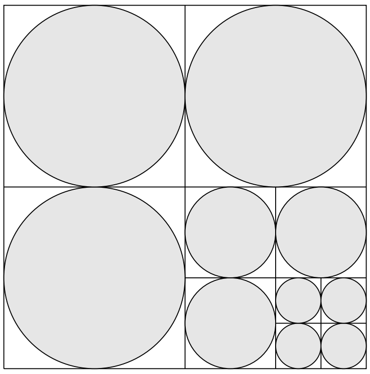
Eine Figur (hier Rechteck) wird in Figuren zerlegt, die ihr ähnlich sind.
Das ist die Idee, die sich hinter dem Satz von Pythagoras verbirgt.
Sie ist nicht auf rechtwinklige Dreiecke beschränkt, wie die Beispiele zeigen.
Den Figuren werden hier Halbkreise hinzugefügt, wobei die Ähnlichkeit erhalten bleibt.

Fasse alle Kreisflächen zusammen.

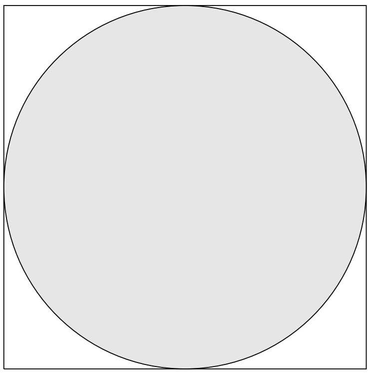


↑ Ähnliche Figuren

Fasse alle Kreisflächen zusammen.

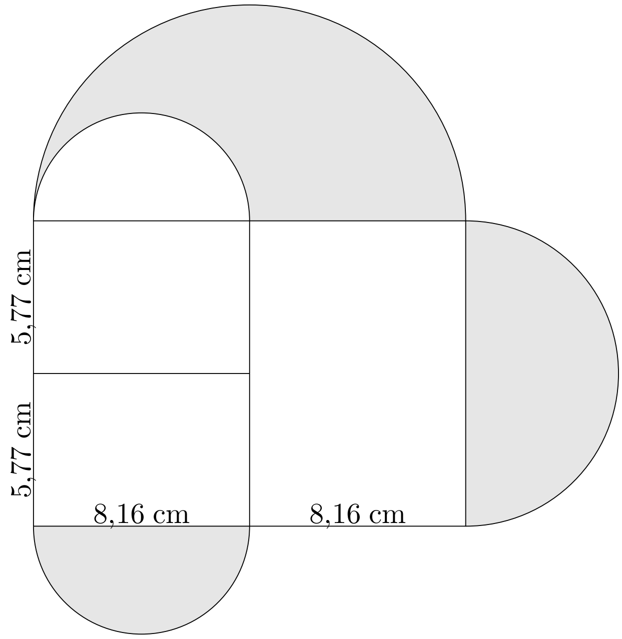


Lösung



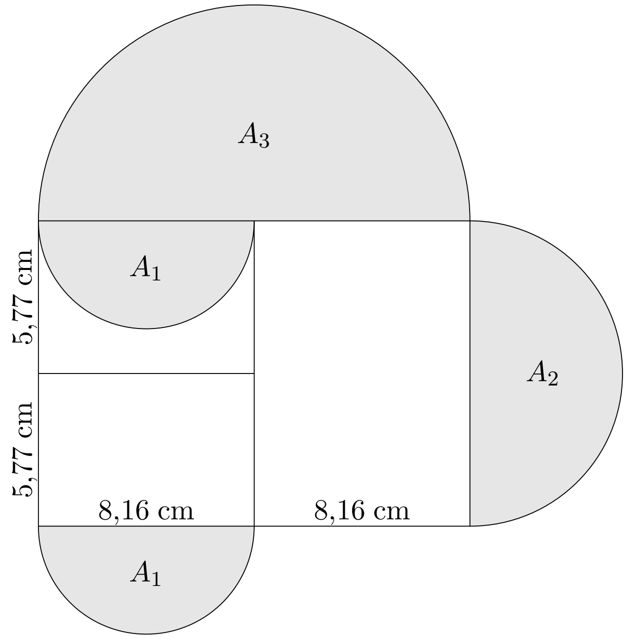
Der Unterteilungsprozess könnte unbegrenzt fortgesetzt werden.
Das Ergebnis bliebe gleich.

↑ Ähnliche Figuren



Welche Beziehung besteht zwischen den grau gefärbten Flächen?

↑ Ähnliche Figuren

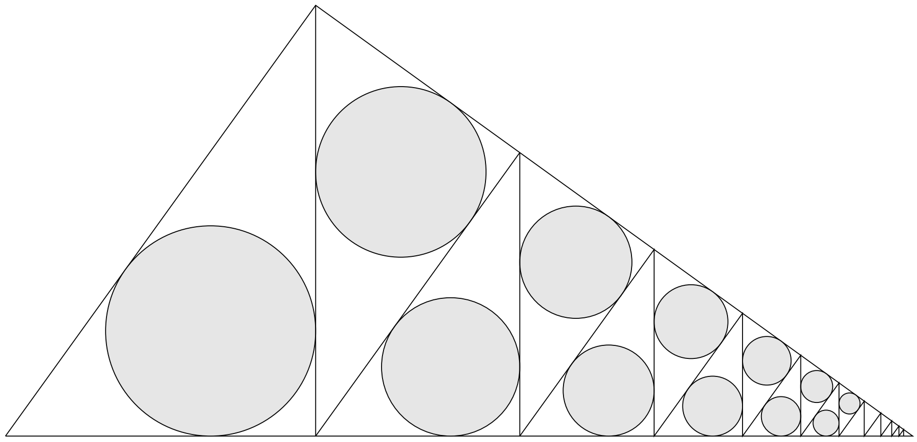


Welche Beziehung besteht zwischen den grau gefärbten Flächen?

Die Rechtecke sind (fast exakt) ähnlich. Der Inhalt des größten Halbkreises ist die Summe der Inhalte der kleineren Halbkreise.

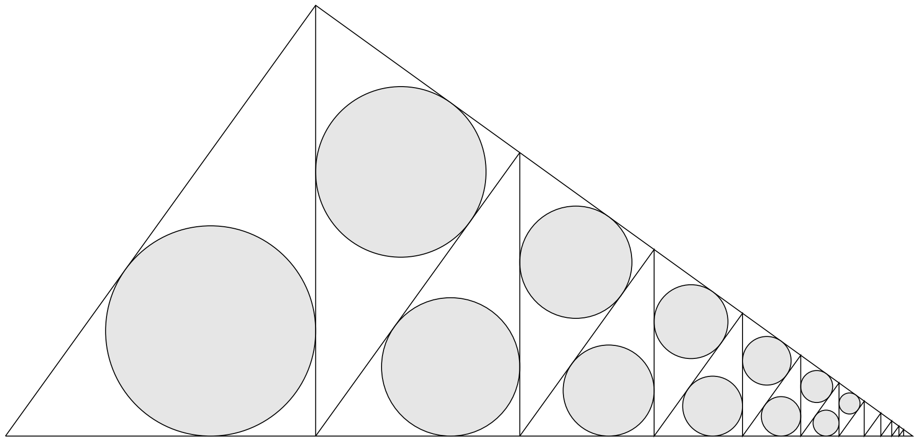
$$\begin{aligned} A_3 &= 2A_1 + A_2 \\ A_3 - A_1 &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

↑ Grenzwertiges



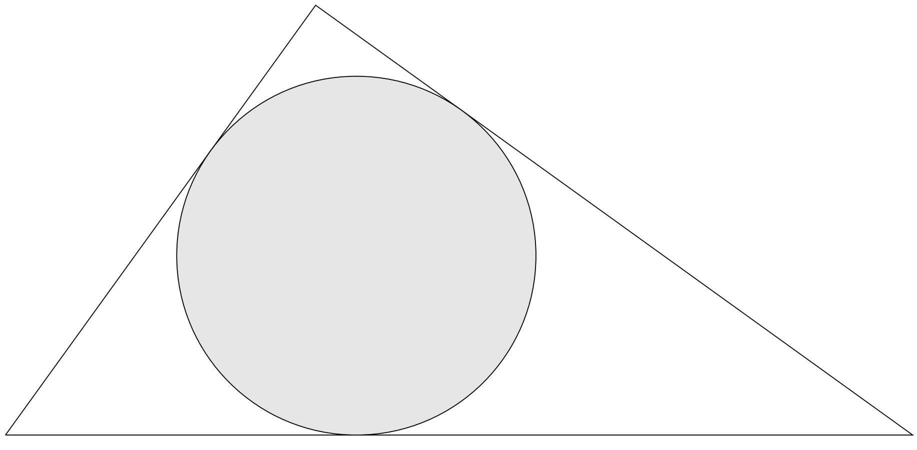
Denke dir den Prozess unbegrenzt fortgesetzt
und fasse alle Kreisflächen zusammen.

↑ Grenzwertiges

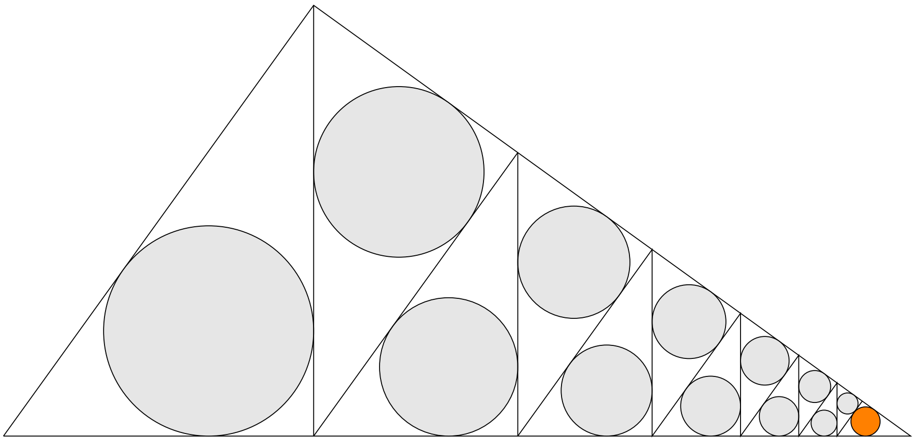


Denke dir den Prozess unbegrenzt fortgesetzt
und fasse alle Kreisflächen zusammen.

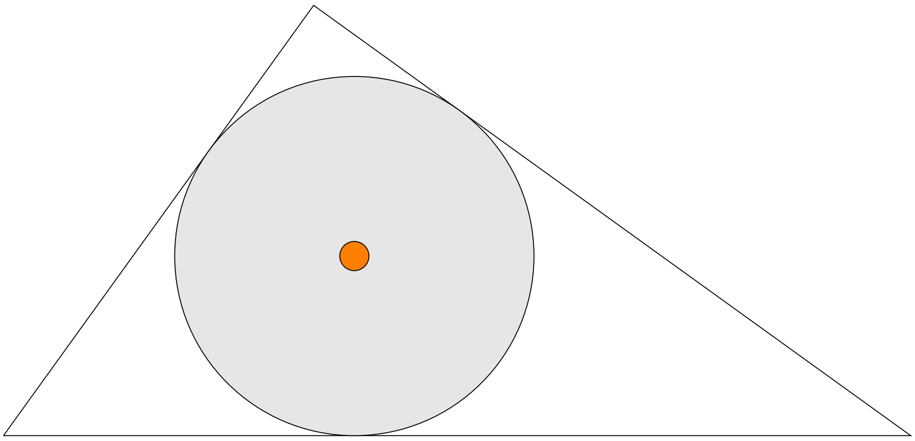
Ergebnis



↑ Grenzwertiges



Figur 1

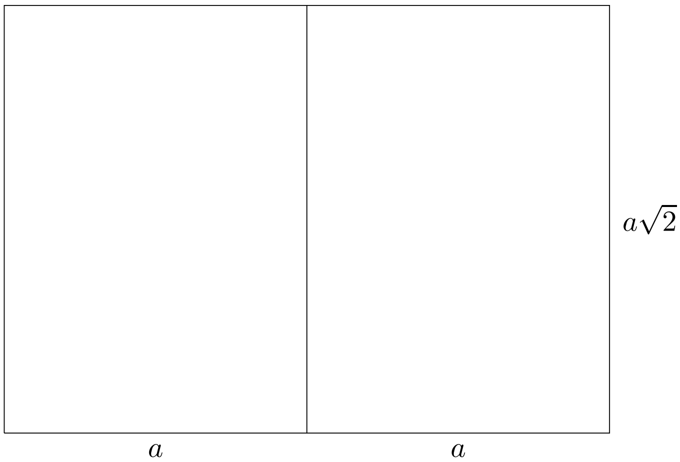


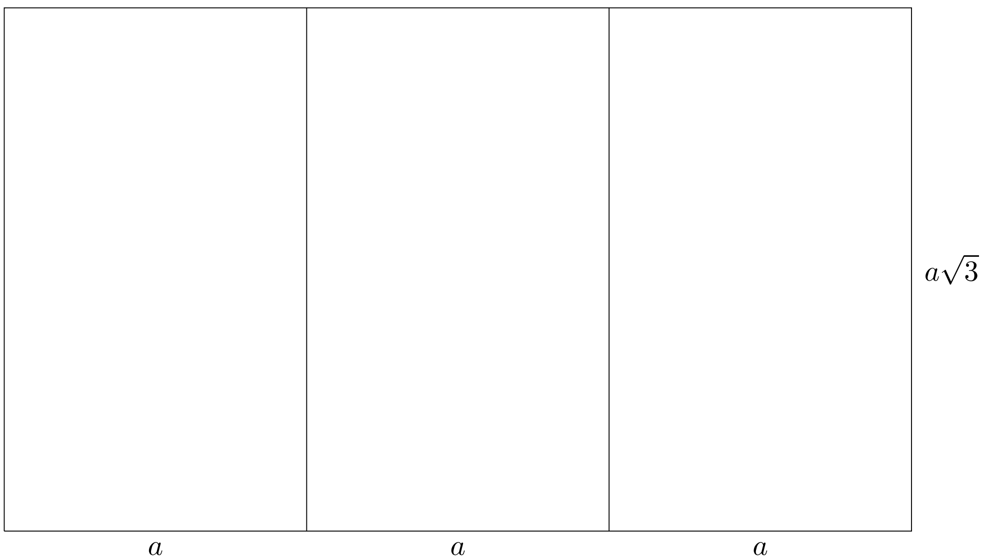
Figur 2

Werden nur endlich viele Unterteilungen (hier $n = 12$) vorgenommen,
ergeben alle grau gefärbten Kreisflächen von Figur 1 aufgrund der
Ähnlichkeitsargumentation zusammen die grau gefärbte Fläche von Figur 2.
(Alle Kreisflächen (grau und orange) von Figur 1 ergeben zusammen den Inkreis von Figur 2.)
Wird n vergrößert, so verkleinert sich die orange gefärbte Kreisfläche.

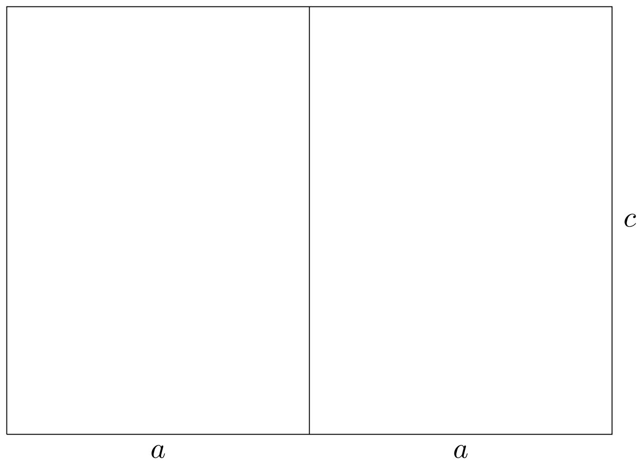
↑ Vorlagen

Die Figuren sind für eigene Kreationen.





↑ Zerlegung eines Rechtecks



Wird ein Rechteck mit den Seitenlängen $2a$ und c in zwei ihm ähnliche Rechtecke zerlegt, muss $c = a\sqrt{2}$ sein.

$$\begin{aligned}\frac{2a}{c} &= \frac{c}{a}\\ c^2 &= 2a^2\\ c &= a\sqrt{2}\end{aligned}$$

Wegen der Ähnlichkeit der Teilrechtecke (gleiche Seite c) muss $2a$ halbiert werden.

Für ein Rechteck mit den Seitenlängen na und c
und einer Zerlegung in n ihm ähnliche, gleich große Rechtecke gilt $c = a\sqrt{n}$.