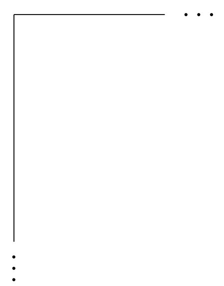
1. Pythagoras rechtwinkliges Dreieck gesucht
2. Pythagoras
3. Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ direkt einsehbar
4. Berechnungen im Kopf
5. Ganzzahlig
6. Aufgaben
7. Weitsicht
8. Schrankhöhe
9. Fußweg
10. Länge einer Strecke
11. Länge einer Strecke weitere Aufgabe
12. Pythagoras alternativer Einstieg
13. Pyramide, Pyramiden- und Kegelstumpf Übungsaufgaben
14. Vielecke
15. Berührender Kreis
16. Auf einen Blick mehrere Seiten
17. Pythagoras Beweis Roolfs
18. Pythagoras Beweis Liu Hui

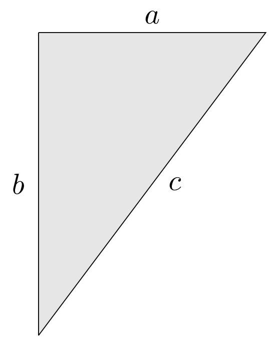
↑ Pythagoras

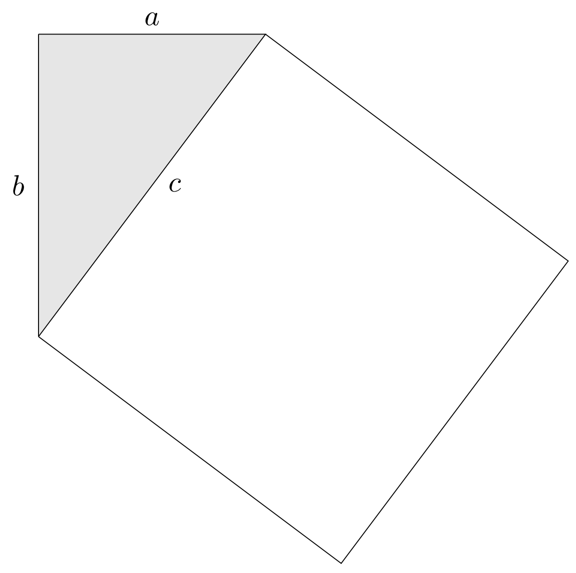
Suche ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen.

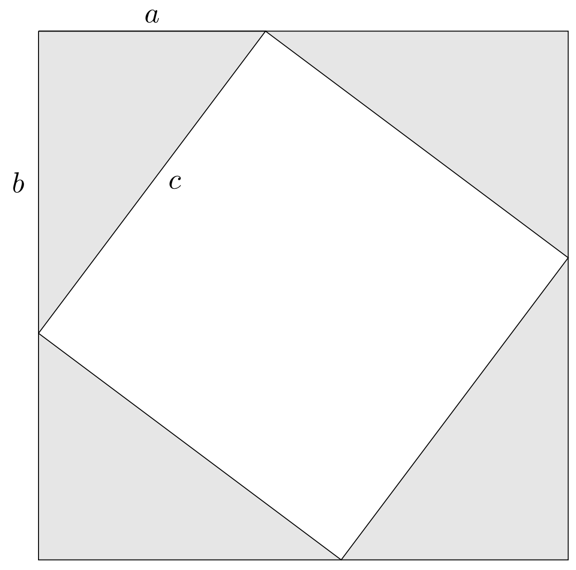


↑ Pythagoras

Für ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 3$ und $b = 4$ (in cm) gilt vermutlich $c = 5$.
Weise diese Vermutung nach.
Tipp: Bestimme den Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge c.







↑ Pythagoras

1. Wiederhole die Überlegungen der vorigen Seite mit

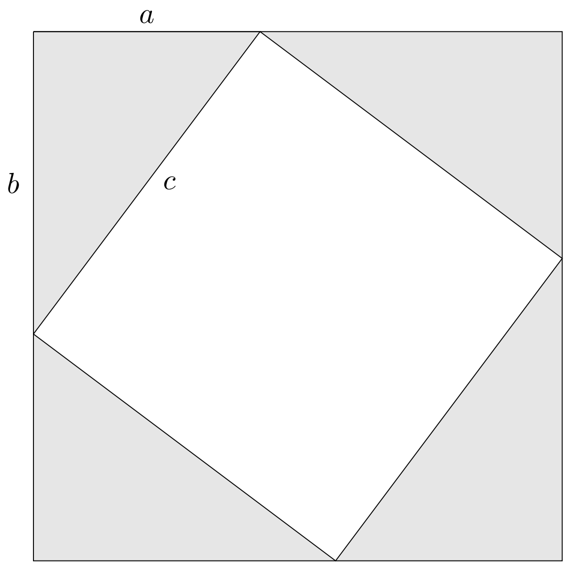
   (1) $a = 6$ und $b = 8$

   (2) $a = 5$ und $b = 12$

   und verallgemeinere sie.

2. Begründe: Ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 6$, $b = 8$ und $c = 10$ ist rechtwinklig.

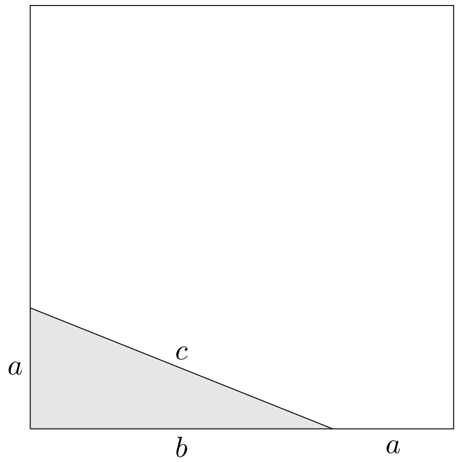
↑ Pythagoras

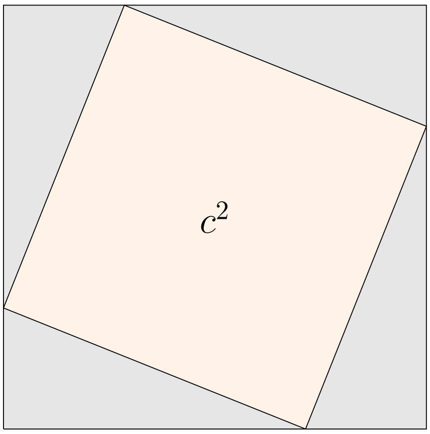


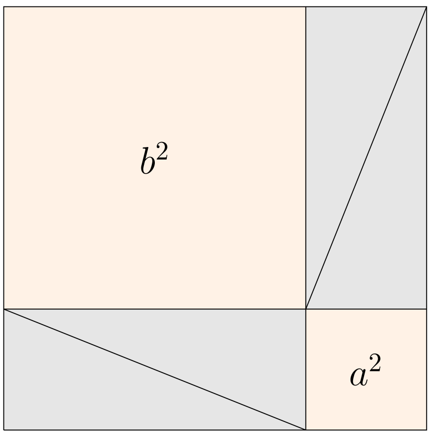
$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 2ab + c^2\\ a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2\\ a^2 + b^2 &= c^2\end{aligned}$$

Jeweils 2 Dreiecke ergeben ein Rechteck.

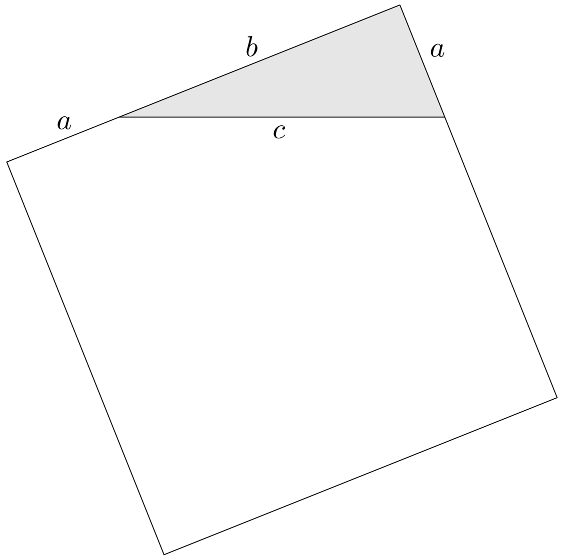
↑ Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ direkt einsehbar

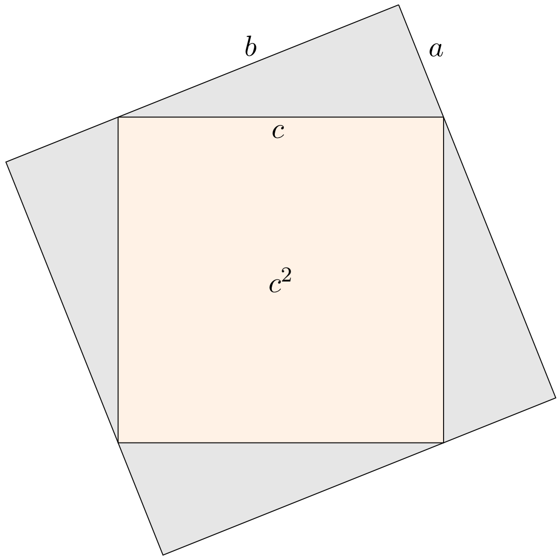


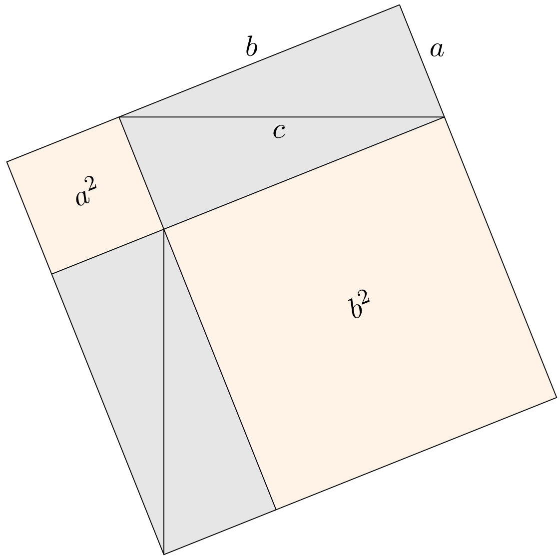




↑ Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ direkt einsehbar



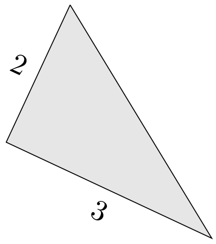




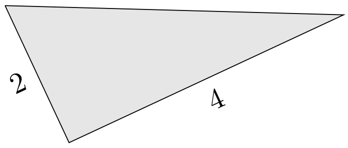
↑ Im Kopf

Ermittle die Länge der fehlenden Seite.

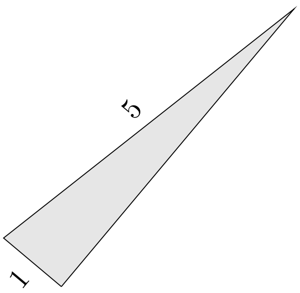
a)



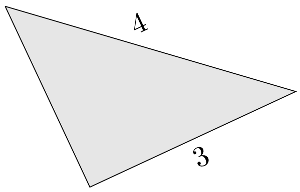
b)



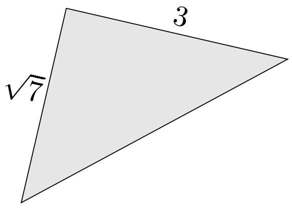
c)



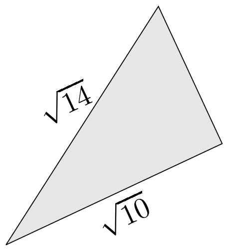
d)



e)



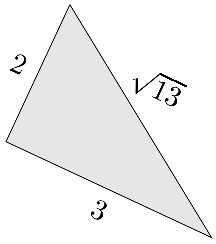
f)



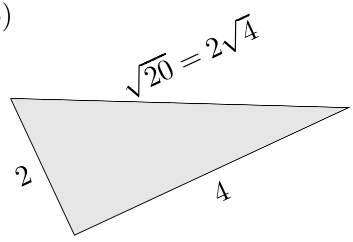
↑ Im Kopf

Ermittle die Länge der fehlenden Seite.

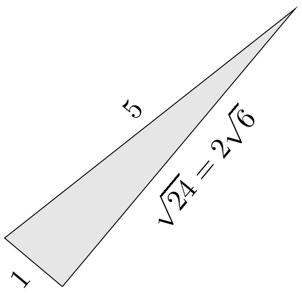
a)



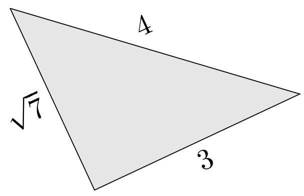
b)



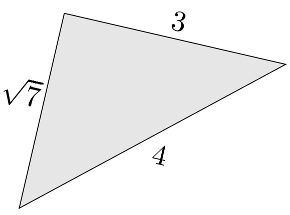
c)



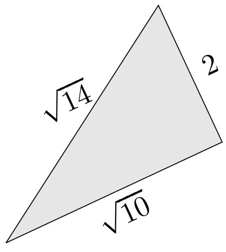
d)



e)



f)



↑ Ganzzahlig

Ermittle die Länge der fehlenden Seite eines rechtwinkligen Dreiecks.

a) $a = 5, \quad b = 12$

b) $a = 7, \quad c = 25$

c) $b = 15, \quad c = 17$

d) $a = 20, \quad b = 21$

e) $a = 56, \quad b = 90$

f) $b = 52, \quad c = 173$

↑ Ganzzahlig

Ermittle die Länge der fehlenden Seite eines rechtwinkligen Dreiecks.

a) $a = 5,\quad b = 12,\quad c = 13$

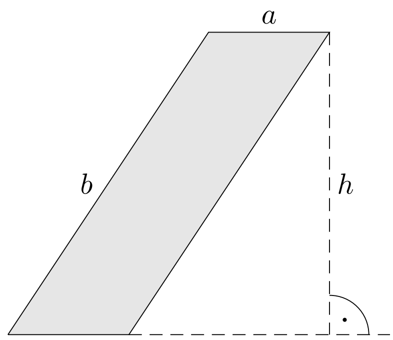
b) $a = 7,\quad c = 25,\quad b = 24$

c) $b = 15,\quad c = 17,\quad a = 8$

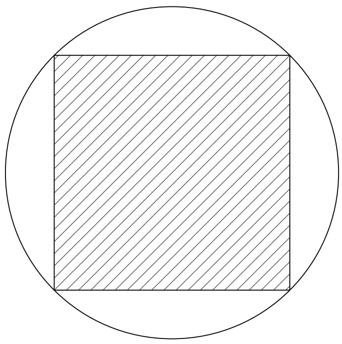
d) $a = 20,\quad b = 21,\quad c = 29$

e) $a = 56,\quad b = 90,\quad c = 106$

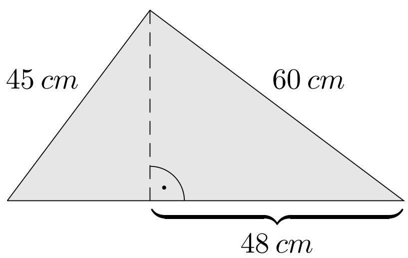
f) $b = 52,\quad c = 173,\quad a = 165$



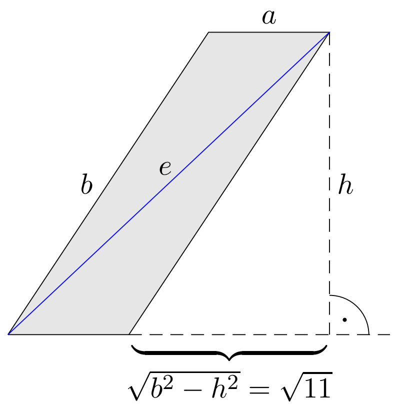
1. Ein Parallelogramm hat die Seitenlängen $a = 2\,cm$, $b = 6\,cm$ und die Höhe $h = 5\,cm$.
   Wie lang ist die längere Diagonale?



2. Aus einem Baumstamm (Durchmesser $d = 20\,cm$) soll ein Balken mit möglichst großem quadratischen Querschnitt hergestellt werden. Ermittle die Kantenlänge des Quadrats.

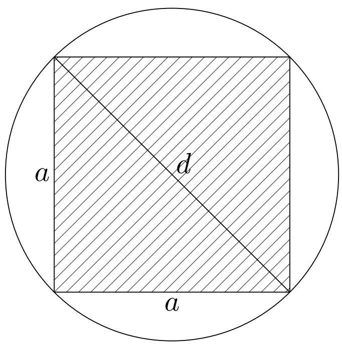


3. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.



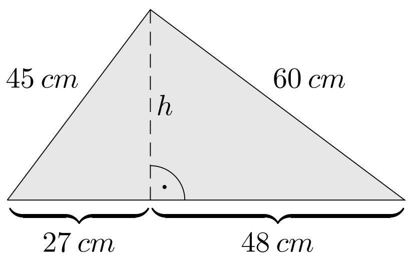
1. Ein Parallelogramm hat die Seitenlängen $a = 2\,cm$, $b = 6\,cm$ und die Höhe $h = 5\,cm$.
   Wie lang ist die längere Diagonale?

   $e = \sqrt{(a + \sqrt{11})^2 + h^2} = 7{,}30\,(cm)$



2. Aus einem Baumstamm (Durchmesser $d = 20\,cm$) soll ein Balken mit möglichst großem quadratischen Querschnitt hergestellt werden. Ermittle die Kantenlänge des Quadrats.

   $2a^2 = d^2,\ a = 14{,}14\,(cm)$



3. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

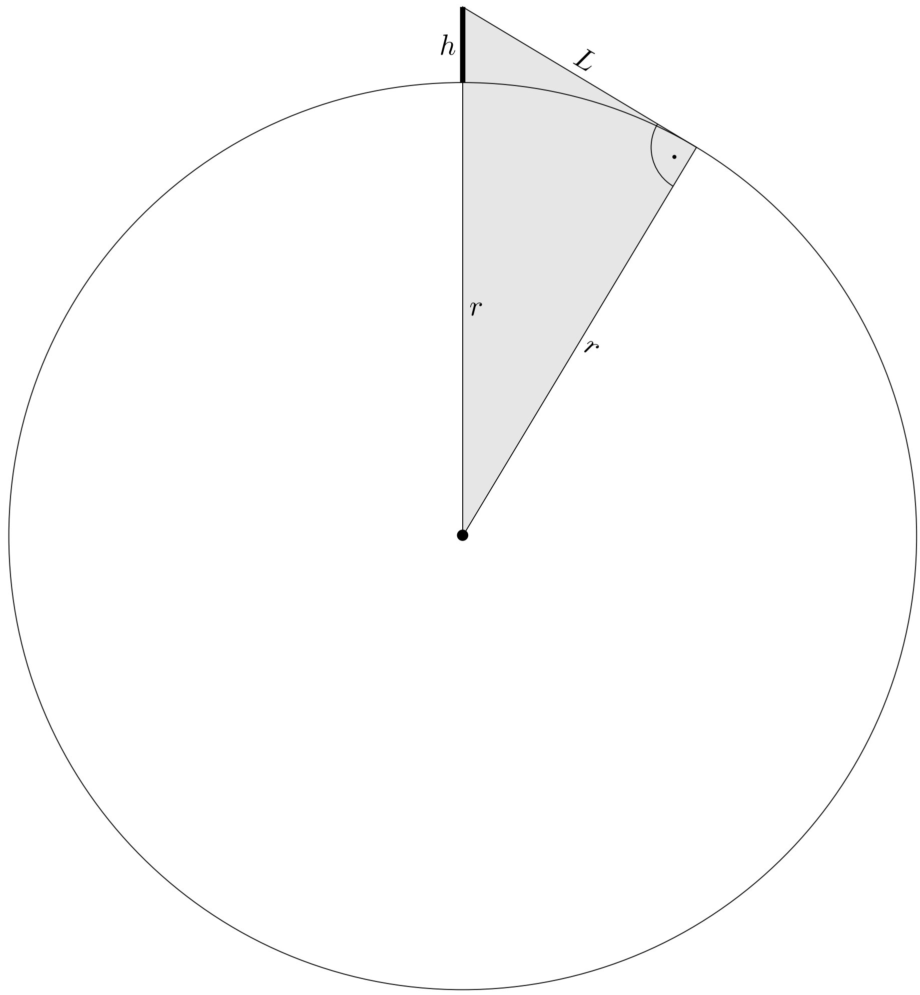
   $h = \sqrt{60^2 - 48^2} = 36\,(cm)$

   $A = 1350\,(cm^2)$

↑ Weitsicht

Ich stehe auf einem 30 m hohen Turm und schaue aufs Meer.
Wie weit, frage ich mich, kann ich wohl sehen?
Glücklicherweise habe ich einen GTR dabei und weiß, dass der Erdradius 6370 km beträgt.

Ich stehe auf einem 30 m hohen Turm und schaue aufs Meer.
Wie weit, frage ich mich, kann ich wohl sehen?
Glücklicherweise habe ich einen GTR dabei und weiß, dass der Erdradius 6370 km beträgt.



$$L = \sqrt{(r+h)^2 - r^2} = \sqrt{2rh + h^2}$$

$$L \approx \sqrt{2rh} = \sqrt{2r\,\frac{\text{Höhe (in } m)}{1000}} = 3{,}6 \cdot \sqrt{\text{Höhe (in } m)} \qquad \text{Faustregel}$$

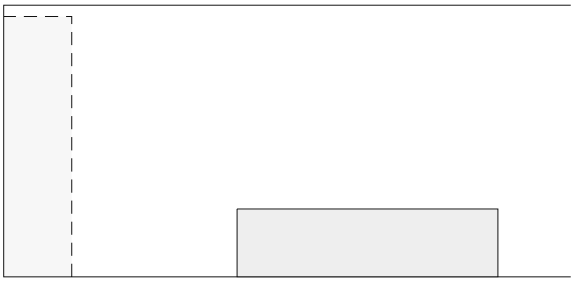
$$L \approx 20\,km$$

Für eine Turmhöhe von $h = 35\,m$ beträgt die Weitsicht $L \approx 21\,km$,

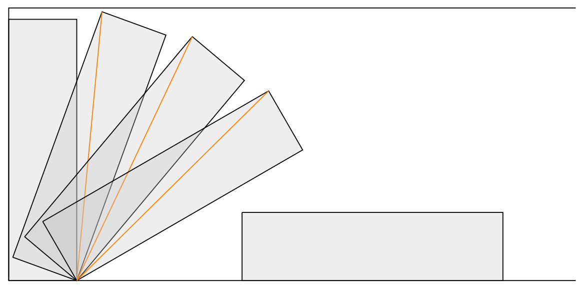
für $h = 100\,m$ sind es $L \approx 36\,km$.

↑ Schrankhöhe

Wie hoch darf ein 60 cm tiefer Schrank höchstens sein, damit man ihn bei einer Deckenhöhe von 2,40 m aufstellen kann?



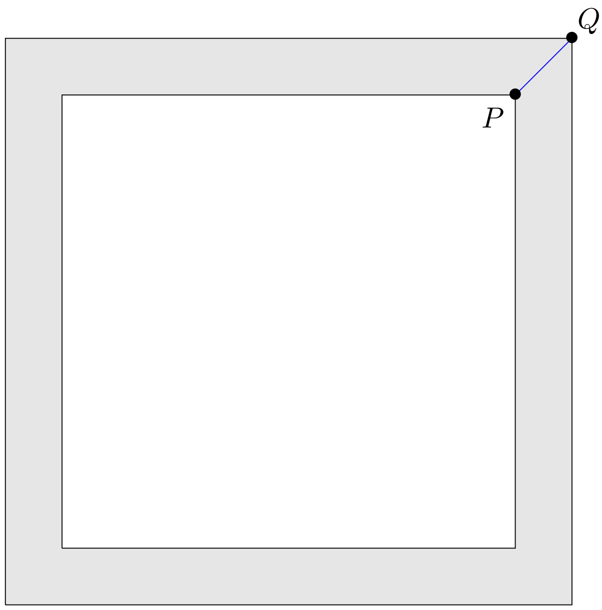
Wie hoch darf ein 60 cm tiefer Schrank höchstens sein, damit man ihn bei einer Deckenhöhe von 2,40 m aufstellen kann?



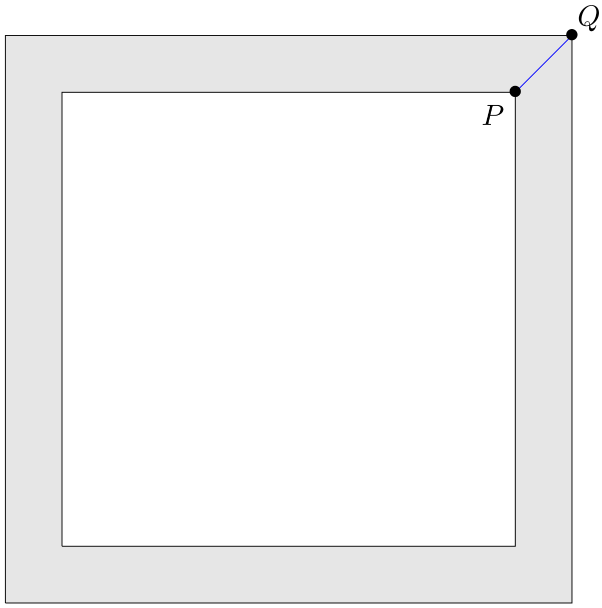
max. Schrankhöhe $= \sqrt{2{,}4^2 - 0{,}6^2} \approx 2{,}32\ (m)$

↑ Fußweg

Ein Fußweg wird durch 2 Quadrate begrenzt,
deren Seitenlängen $a = 12\,m$ und $b = 17\,m$ betragen.
Berechne die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.



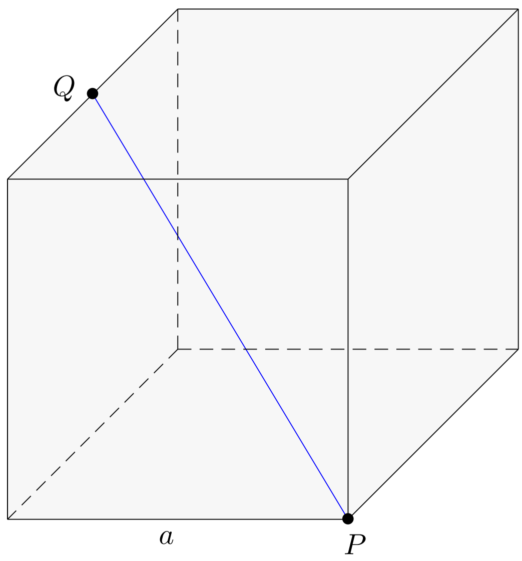
Ein Fußweg wird durch 2 Quadrate begrenzt,
deren Seitenlängen $a = 12\,m$ und $b = 17\,m$ betragen.
Berechne die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.



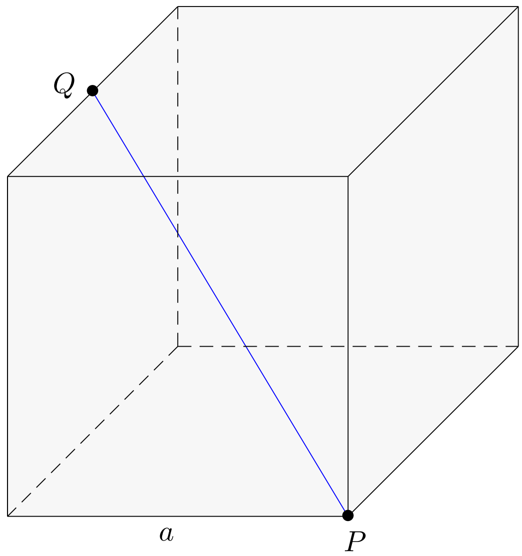
$$\overline{PQ} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

↑ Länge einer Strecke

Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge a.
Q halbiert die Würfelkante.
Berechne die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.



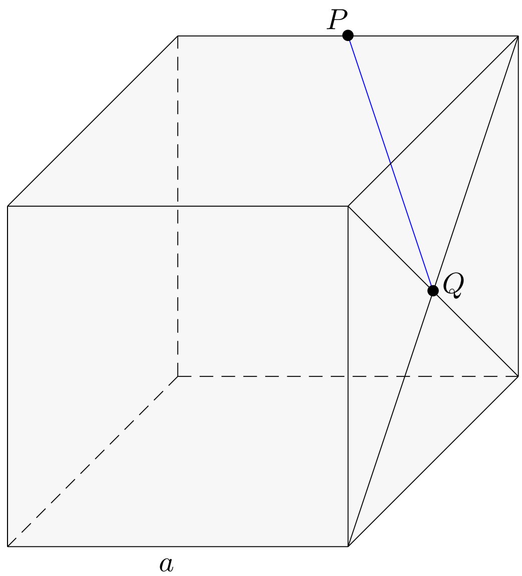
Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge a.
Q halbiert die Würfelkante.
Berechne die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.



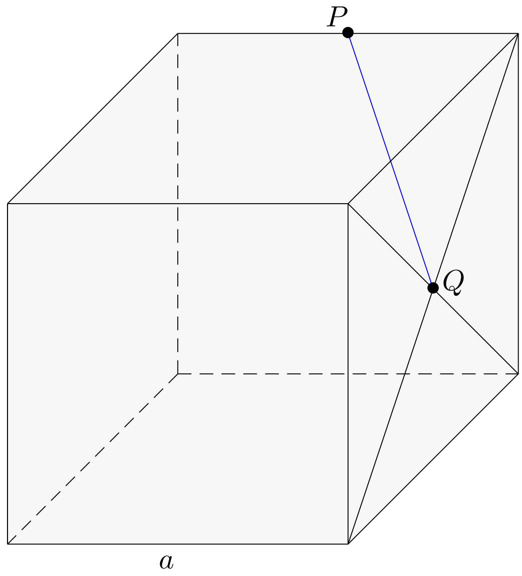
$$\overline{PQ} = \frac{3}{2}a$$

↑ Länge einer Strecke

Gegeben ist ein Würfel mit Kantenlänge a.
Berechne die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.
P halbiert die Würfelkante.

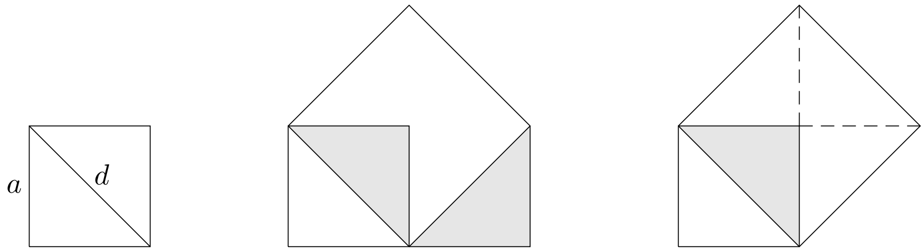


Gegeben ist ein Würfel mit Kantenlänge a.
Berechne die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.
P halbiert die Würfelkante.

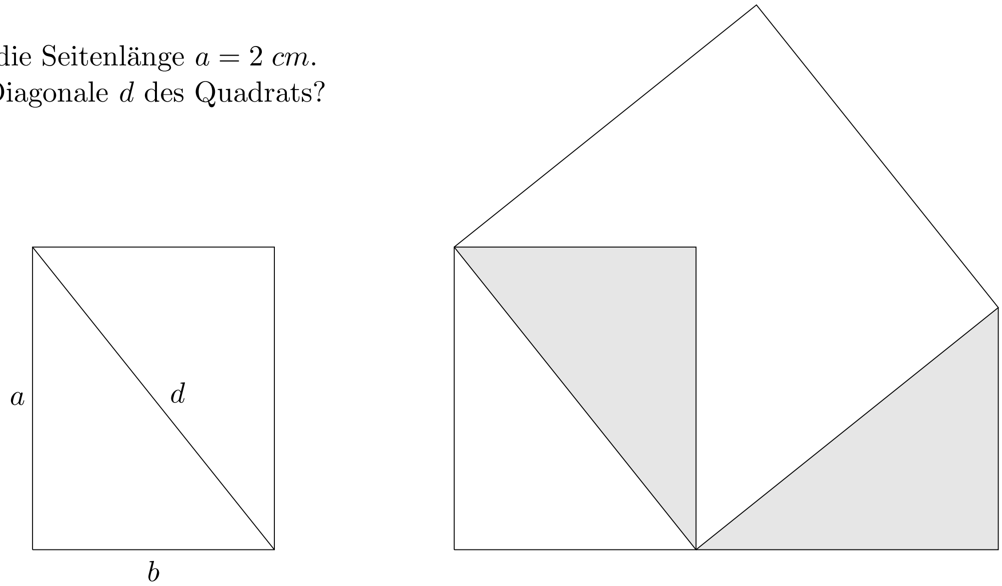


$$\overline{PQ} = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} = \ldots = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

↑ Pythagoras alternativer Einstieg



1. Ein Quadrat hat die Seitenlänge $a = 2\ cm$.
   Wie lang ist die Diagonale d des Quadrats?

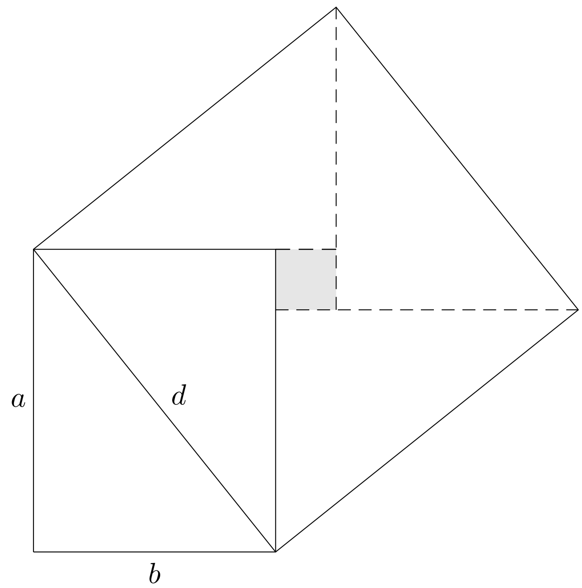


2. Ein Rechteck hat die Seitenlängen $a = 5\ cm$ und $b = 4\ cm$.
   Wie lang ist die Diagonale d ?

   Der Flächeninhalt des Quadrats über der Diagonalen beträgt:

$$\begin{aligned} A &= 2ab + (a-b)^2 \\ &= 2ab + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



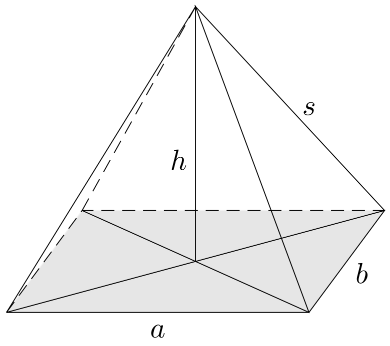
3. Ein Rechteck hat die Seitenlängen $a = 7\,cm$ und $b = 3\,cm$. Wie lang ist die Diagonale?

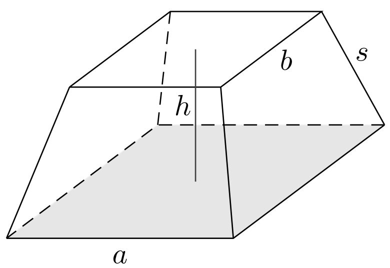
4. Ein Würfel hat die Kantenlänge $a = 2\,cm$.
   Wie lang ist die Raumdiagonale?

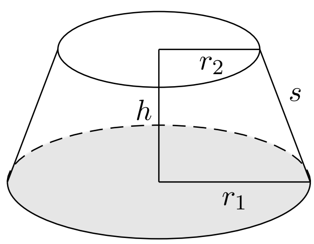
5. Ein Quader hat die Kantenlängen $a = 5\,cm$, $b = 4\,cm$ und $c = 3\,cm$.
   Wie lang ist eine Raumdiagonale?

1. Von einer senkrechten Pyramide mit rechteckiger Grundfläche sind gegeben (in cm):
   $a = 4$, $b = 2$ und $s = 3$.
   Gesucht sind die Pyramidenhöhe h und der Inhalt der Pyramidenseitenflächen.

   Ansätze zuerst stets mit Buchstaben!







2. Von einem quadratischen Pyramidenstumpf sind gegeben (in cm):
   $a = 4$, $b = 2$, $h = 1$, gesucht sind:

   a) Inhalt der Trapezseitenfläche

   b) Länge der Seitenkante s

3. Variation der 2. Aufgabe
   Gegeben sind: $a = 6$, $b = 4$, $h = 2$.

4. Von einem Kegelstumpf sind gegeben (in cm): $r_1 = 10$, $r_2 = 6$, $h = 5$,
   gesucht ist die Länge der Mantellinie s.

5. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Kathetenlängen gegeben, berechne die Länge der Hypotenuse.

   a) a, $2a$ b) $2a$, $6a$ c) $\sqrt{a}$, 4

   d) a, $\frac{a}{2}$ e) $\frac{3}{2}$, 2 f) 2,35; 4,67

↑ Pyramide, Pyramiden- und Kegelstumpf Lösungen

1. Höhe der Pyramide: $h = 2$
   Höhen der Seitenflächen: $h_a = \sqrt{5}$, $h_b = 2\sqrt{2}$,
   Inhalte der Seitenflächen: $A_a = 2\sqrt{5}$, $A_b = 2\sqrt{2}$

2. a) $A_{\text{Trapez}} = 3\sqrt{2}$

   b) $s = \sqrt{3}$

3. a) $A_{\text{Trapez}} = 5\sqrt{5}$

   b) $s = \sqrt{6}$

4. $s = \sqrt{41}$

5. a) $a\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{10}a$ c) $\sqrt{16 + a}$

   d) $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ e) $\frac{5}{2}$ f) 5,23

$\uparrow$ Vielecke

1. Das Vieleck ist durch die Eckpunkte gegeben.
   Berechne den Flächeninhalt und den Umfang.

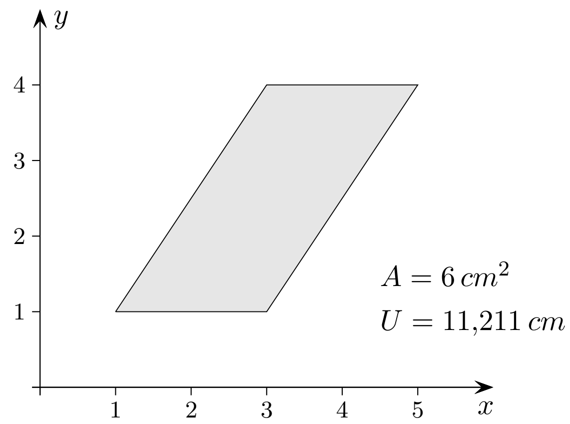
   a) $A\big(1\,|\,1\big),\ B\big(3\,|\,1\big),\ C\big(5\,|\,4\big),\ D\big(3\,|\,4\big)$

   b) $A\big(0\,|\,0\big),\ B\big(3\,|\,1\big),\ C\big(4\,|\,4\big),\ D\big(1\,|\,3\big)$

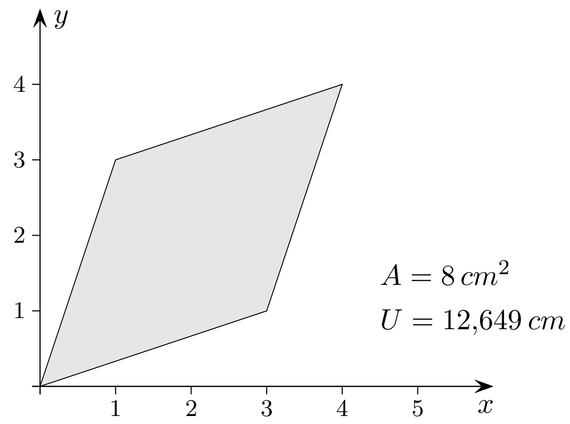
   c) $A\big(0\,|\,1\big),\ B\big(4\,|\,1\big),\ C\big(4\,|\,3\big),\ D\big(2\,|\,5\big)$

1. Das Vieleck ist durch die Eckpunkte gegeben.
   Berechne den Flächeninhalt und den Umfang.

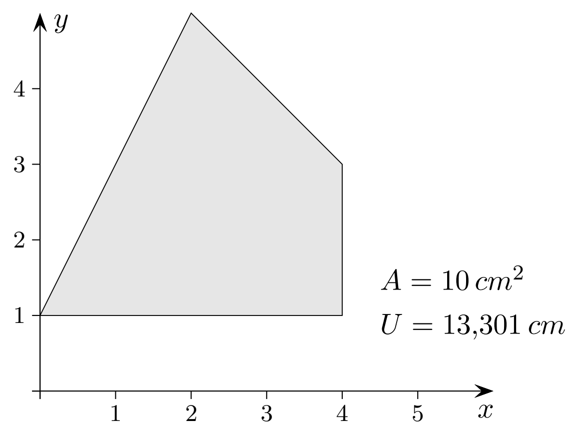
   a) $A(1\,|\,1)$, $B(3\,|\,1)$, $C(5\,|\,4)$, $D(3\,|\,4)$



   b) $A(0\,|\,0)$, $B(3\,|\,1)$, $C(4\,|\,4)$, $D(1\,|\,3)$

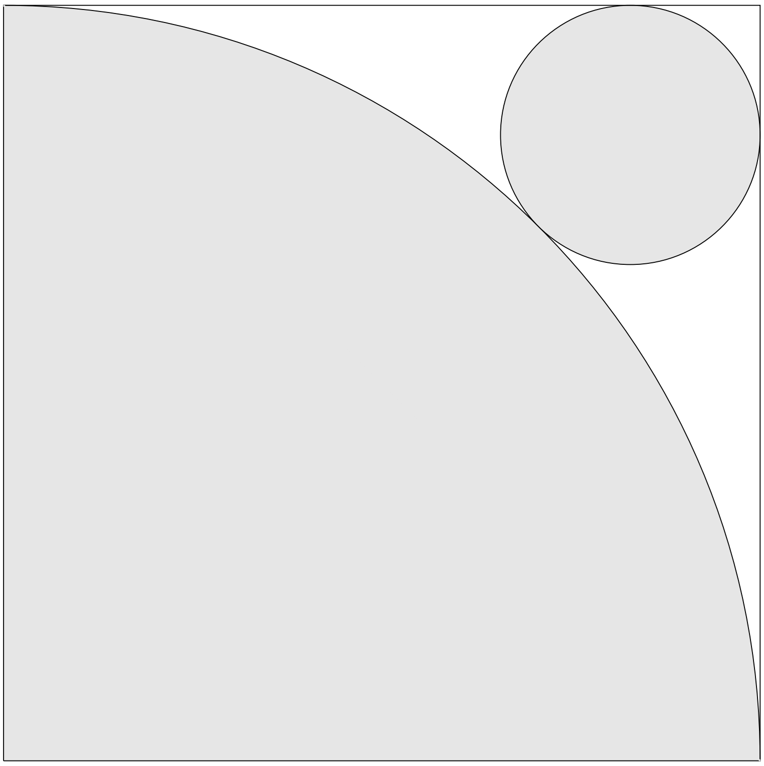


   c) $A(0\,|\,1)$, $B(4\,|\,1)$, $C(4\,|\,3)$, $D(2\,|\,5)$



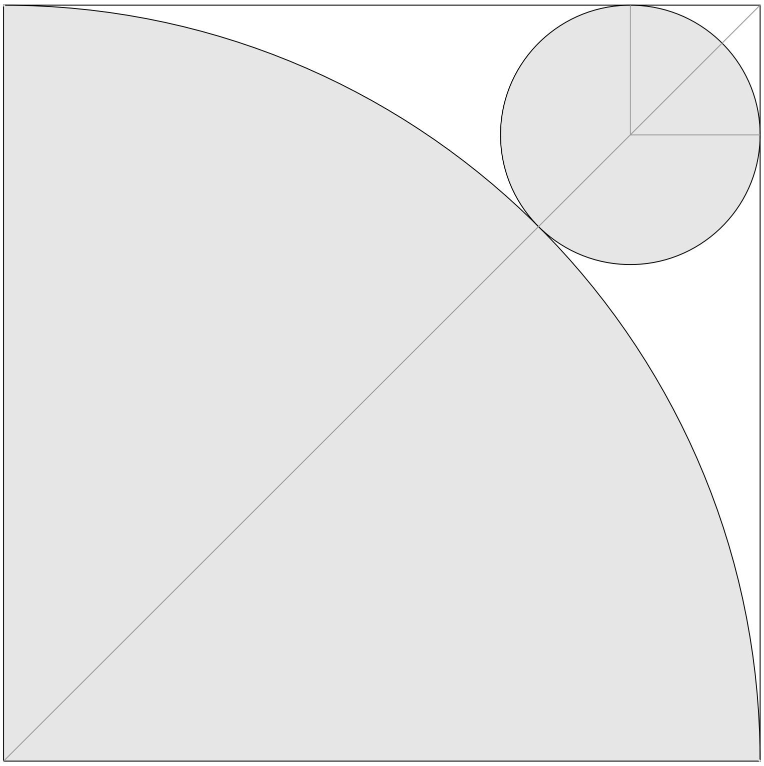
↑ Berührender Kreis

Die Seitenlänge des Quadrats beträgt 10 cm.
Wie groß ist der Radius des kleinen Kreises?



↑ Berührender Kreis

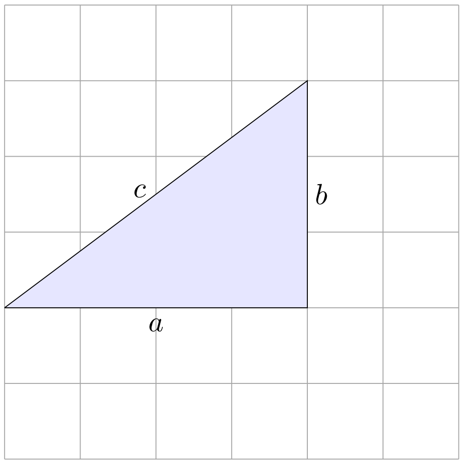
Die Seitenlänge des Quadrats beträgt 10 cm.
Wie groß ist der Radius des kleinen Kreises?



$$10\sqrt{2} - 10 = r + r\sqrt{2}$$

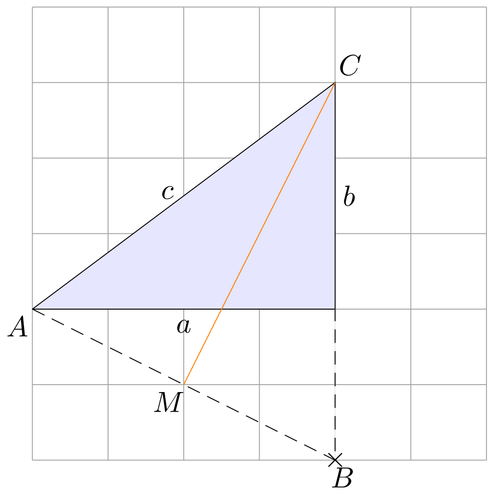
$$r = \frac{10(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1} = 30 - 20\sqrt{2}$$

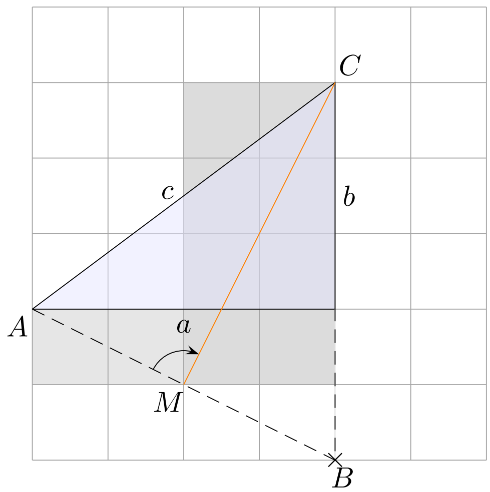
↑ Auf einen Blick



$$a = 4$$
$$b = 3$$

Begründe, ohne zu rechnen: $c = 5$





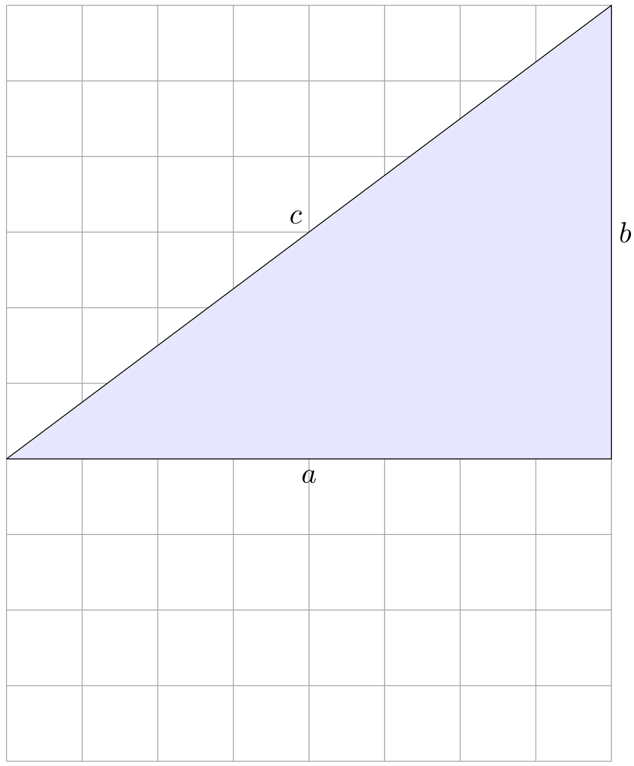
$$a = 4$$
$$b = 3$$
Begründe, ohne zu rechnen: $c = 5$

z. B.:
Wir zeichnen zuerst den Punkt B.
M ist die Mitte von $\overline{AB}$.
Nachzuweisen ist,
dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, $|\,\overline{AC}\,| = |\,\overline{BC}\,|$,
$\overline{MC}$ also senkrecht auf $\overline{AB}$ steht.
Hierzu betrachte man die grauen Rechtecke
und eine Drehung um 90°.

Es könnten auch die Steigungen $m_{AM} = -\frac{1}{2}$ und $m_{MC} = \frac{4}{2} = 2$ ermittelt werden.

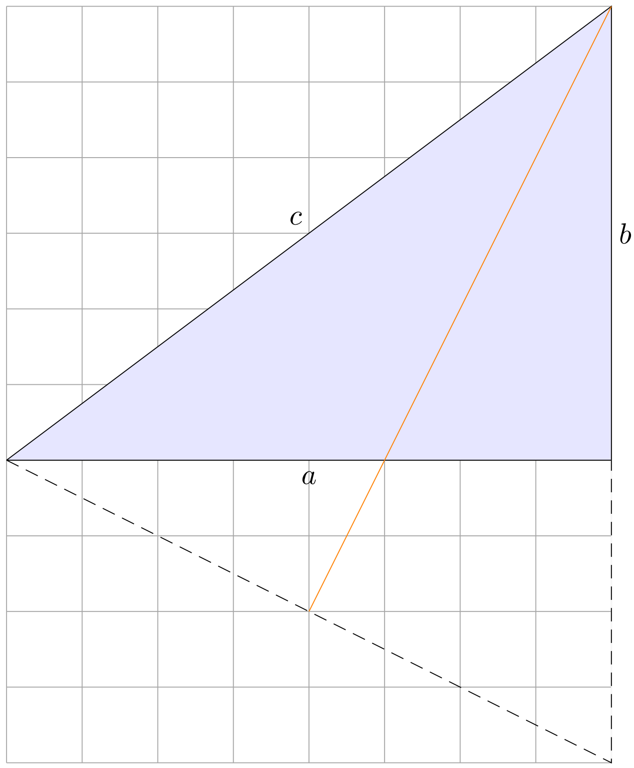
Beachte dann:
Zwei Geraden verlaufen genau dann senkrecht zueinander,
wenn für die Steigungen gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

↑ Auf einen Blick



$$a = 8$$
$$b = 6$$
Begründe, ohne zu rechnen: $c = 10$

↑ Auf einen Blick



$$a = 8$$

$$b = 6$$

Begründe, ohne zu rechnen: $c = 10$

Vergleiche mit dem vorigen Dreieck.

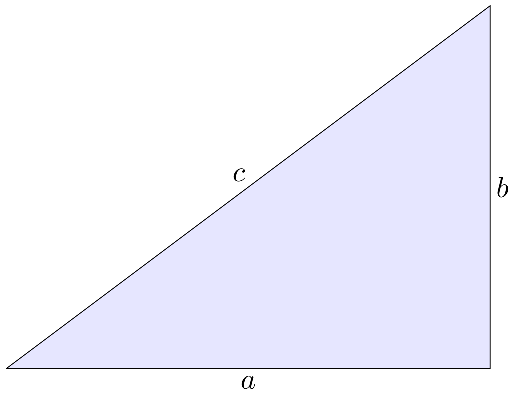
Weiteres:

$$a = 12$$

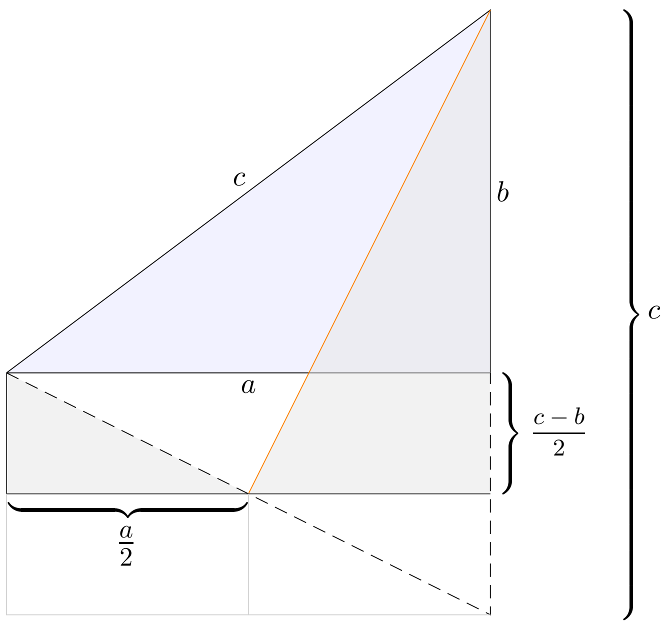
$$b = 5$$

Begründe, ohne zu rechnen: $c = 13$

↑ Pythagoras



Begründe: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$



Begründe: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Idee: Verlängere die Seite b um $c - b$ zu einem gleichschenkligen Dreieck, siehe Grafik.

Beachte:
Zwei Geraden verlaufen genau dann senkrecht zueinander,
wenn für die Steigungen gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

$$-\frac{\frac{c-b}{2}}{\frac{a}{2}} \cdot \frac{b + \frac{c-b}{2}}{\frac{a}{2}} = -1$$

$$\frac{c-b}{a} \cdot \frac{c+b}{a} = 1$$

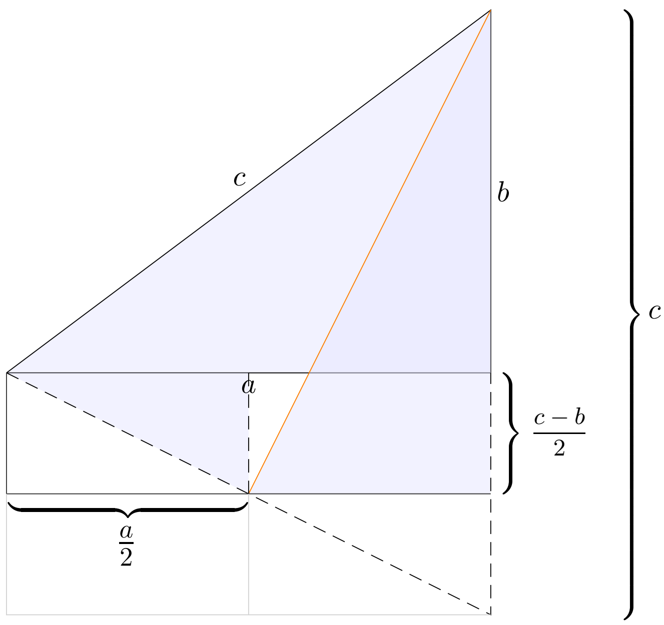
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Alternativ kann wegen der Ähnlichkeit zweier Dreiecke
(Schenkel stehen paarweise senkrecht aufeinander) die Gleichung

$$\frac{\frac{c-b}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{b + \frac{c-b}{2}}$$

gewonnen werden.

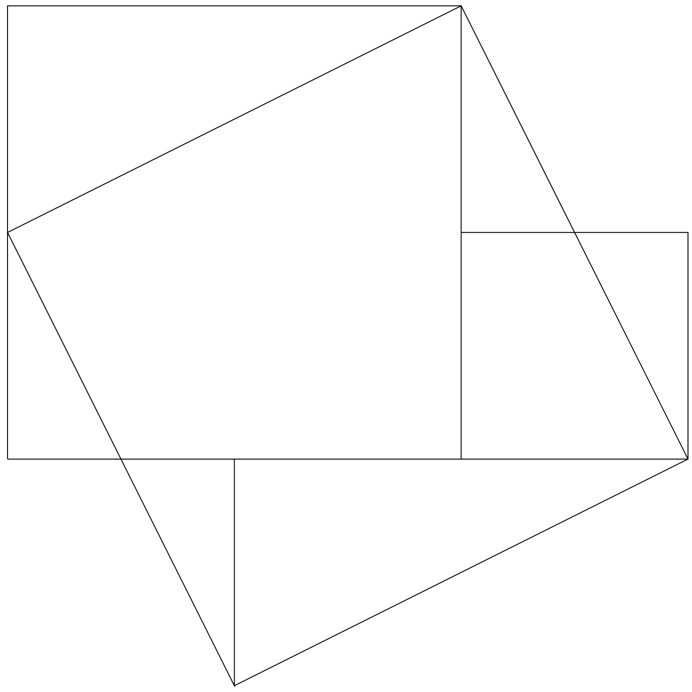
↑ Pythagoras

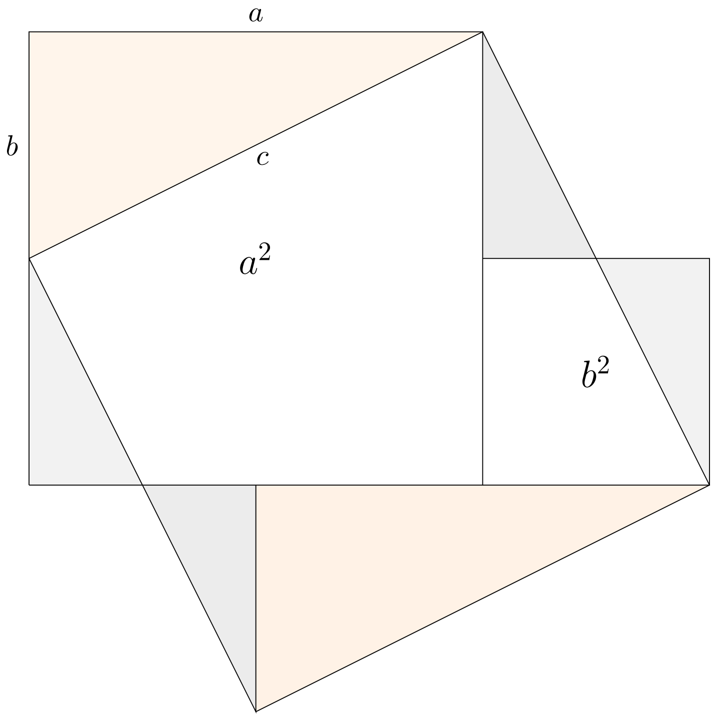


Die hellgrauen Dreiecke sind ähnlich. Leicht variiert:

$$\begin{aligned}
\frac{c-\frac{c-b}{2}}{\frac{a}{2}} &= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{c-b}{2}} \\
\frac{\frac{c+b}{2}}{\frac{a}{2}} &= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{c-b}{2}} \\
(c+b)(c-b) &= a^2 \\
c^2-b^2 &= a^2 \\
c^2 &= a^2+b^2
\end{aligned}$$

 Beweis Liu Hui, 3. Jh.





Betrachte die Quadrate mit den Inhalten a^2 und b^2.
Einige Teilflächen werden abgeschnitten. Mit ihnen und den restlichen Teilen kann das c^2-Quadrat zusammengesetzt werden.