↑ Parabeln

Wir stellen uns vor, einen Stein von einem hohen Gebäude fallen zu lassen und interessieren uns für den Zusammenhang von verstrichener Zeit x (in Sekunden) und zurückgelegter Fallstrecke y (in Metern). Die Tabelle enthält mögliche Messwerte.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	5	20	45	80	125

Um die Beziehung von x und y aufzudecken, teilen wir die y-Werte durch 5.

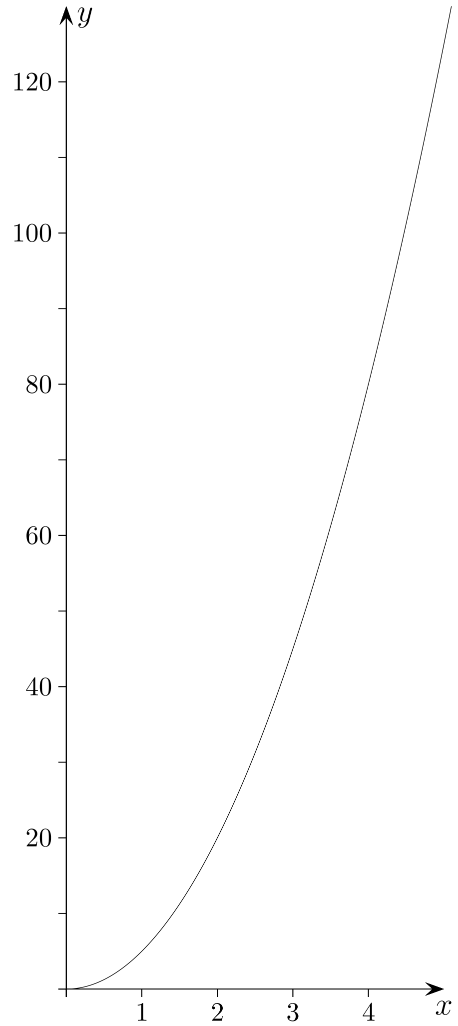
x	0	1	2	3	4	5
$\frac{y}{5}$	0	1	4	9	16	25

Nun können wir erkennen, dass stets gilt:

$$\begin{aligned} \frac{y}{5} &= x^2 \\ y &= 5 \cdot x^2 \end{aligned}$$

Der Zusammenhang kann durch einen Graphen veranschaulicht werden.

Der Graph ist in gewissem Sinne eine gebogene Kopie der Grundlinie, hier der positiven x-Achse.



1. Lässt man einen Stein vom Schiefen Turm von Pisa fallen, schlägt er nach 3,35 Sekunden auf. Wie hoch ist der Turm?

2. Ein Stein fällt von einem 65 m hohen Turm. Wieviel Zeit verstreicht bis zum Auftreffen?

3. Variiere den *Parameter* a (beachte, er kann auch negativ sein) und beschreibe, welchen Einfluss er auf die Lage und Form der Parabel hat.

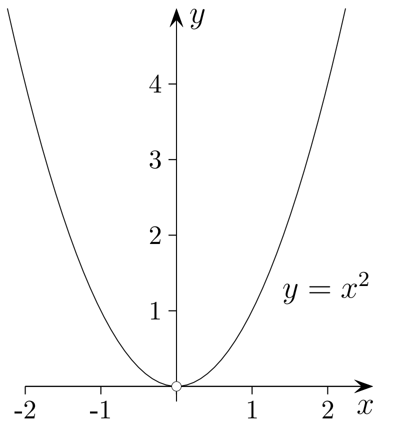
   a) $y = ax^2$

   b) $y = x^2 + a$

   c) $y = (x - a)^2$

↑ Parabeln

Zur Normalparabel gehört die Gleichung $y = x^2$.
Alle Punkte $P(x \mid y)$ der Parabel erfüllen diese Gleichung.

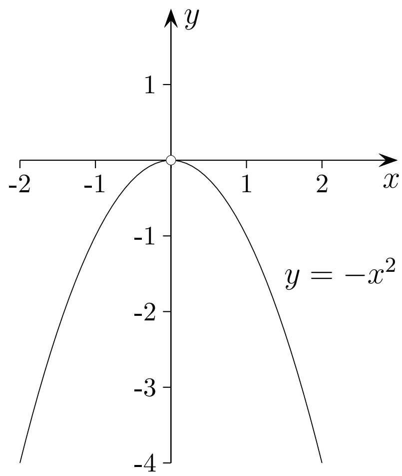


$y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

$y = -x^2$

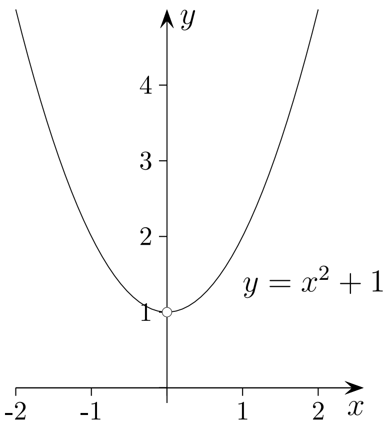
x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4



Die Parabel $y = -x^2$ ist nach unten geöffnet,
der Scheitel ist wieder $S(0 \mid 0)$.

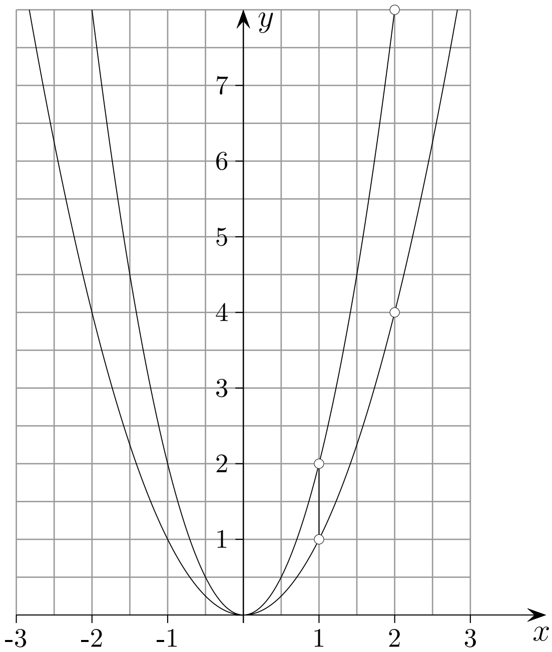
$y = x^2 + 1$

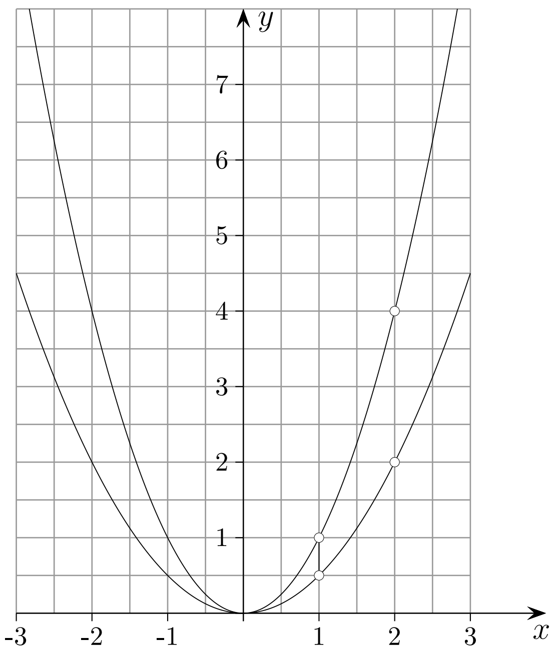
x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5



Aus der Wertetabelle ist ersichtlich, dass die Parabel
$y = x^2 + 1$ gegenüber der Parabel $y = x^2$ um eine Einheit
in y-Achsenrichtung verschoben ist, der Scheitel ist nun $S(0 \mid 1)$.

↑ Parabeln strecken/stauchen



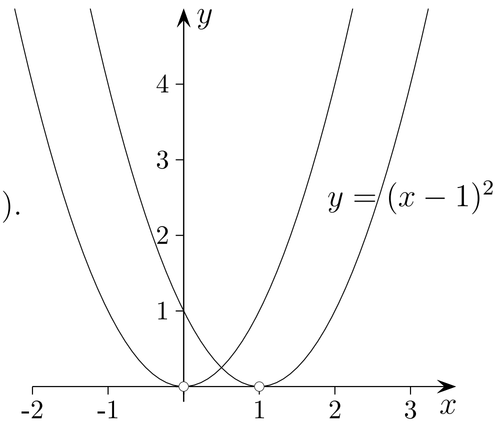


Welche Graphen sind hier abgebildet?

↑ Parabeln verschieben

$y = (x-1)^2$

x	-2	-1	0	1	2	3
x^2	4	1	0	1	4	9
$(x-1)^2$	9	4	1	0	1	4



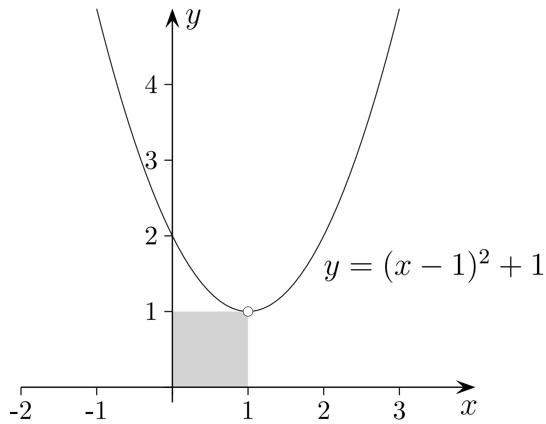
Die Parabel $y = (x-1)^2$ ist gegenüber der Parabel $y = x^2$ um eine Einheit nach rechts verschoben, der Scheitel ist $S(1 \mid 0)$.

Verschiebung um d (d pos.)
nach rechts $\quad x$ durch $x - d$,
nach links $\quad x$ durch $x + d \quad$ ersetzen

$y = (x-1)^2 + 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	10	5	2	1	2

Die Parabel $y = (x-1)^2 + 1$ ist gegenüber der Parabel $y = (x-1)^2$ um eine Einheit in y-Achsenrichtung verschoben ist, der Scheitel ist $S(1 \mid 1)$.



1. Bestimme den Scheitel (Minimum bzw. Maximum) der Parabel:

   a) $y = (x+5)^2$ b) $y = (x-4)^2 - 2$

   c) $y = x^2 - 2x$ d) $y = x^2 - 8x + 12$

   e) $y = x^2 + 10x + 30$ f) $y = x^2 + 4x$

   g) $y = -x^2 - 2x$ h) $y = -x^2 + 6x - 5$

2. Bestimme die Nullstellen der Parabel:

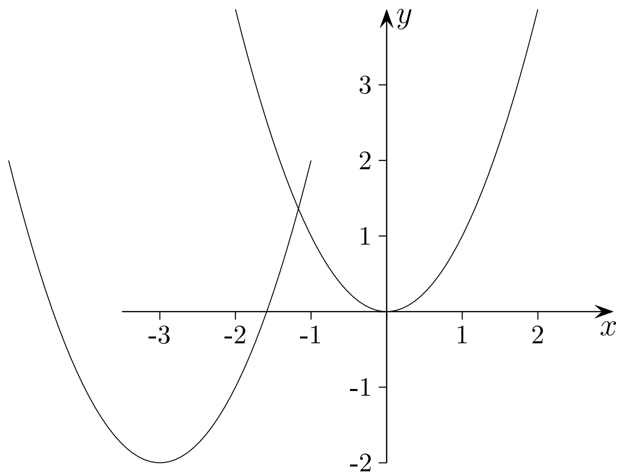
   a) $y = x^2 - x - 20$ b) $y = 2x^2 - 5x - 3$

↑ Parabeln verschieben, GTR

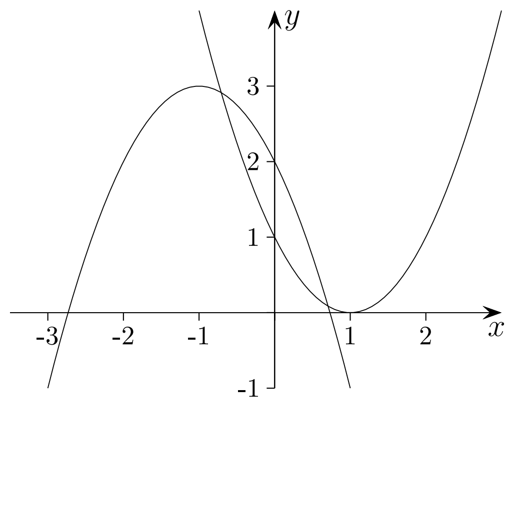
1. Probiere mit dem GTR aus:

$\backslash Y_1 = X^2$	
$\backslash Y_2 = Y_1(X-2)$	siehe VARS | Y-VARS | 1: Function oder ALPHA TRACE
$\backslash Y_3 = Y_2 + 1$	Statt $Y_2(X)$ kann einfach Y_2 geschrieben werden.
$\backslash Y_4 = -Y_3$	Achte auf die Unterscheidung von Vorzeichen- und Rechenzeichen-Minus.

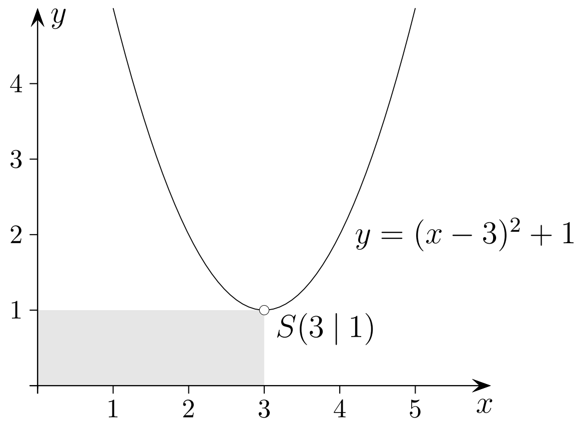
2. Erzeuge auf diese Weise die Grafik (Koordinaten der Scheitel sind ganzzahlig).



3. Erzeuge auf diese Weise die Grafik (Koordinaten der Scheitel sind ganzzahlig).



↑ Scheitelform



Um den Scheitel erkennen zu können, stellen wir die Scheitelform auf:

a)
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 8x & &\mid +16 \qquad \text{binomische Ergänzung, 8 durch 2 ins Quadrat} \\ y + 16 &= \underbrace{x^2 - 8x + 16} & & \\ y + 16 &= \quad (x-4)^2 & &\mid -16 \\ y &= (x-4)^2 - 16 & & \qquad Min(4 \mid -16) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 10 & &\mid -10 \\ y - 10 &= x^2 - 6x & &\mid +9 \\ y - 1 &= \underbrace{x^2 - 6x + 9} & & \\ y - 1 &= \quad (x-3)^2 & &\mid +1 \\ y &= (x-3)^2 + 1 & & \qquad Min(3 \mid 1) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 5x & &\mid + (\tfrac{5}{2})^2 \\ y + \tfrac{25}{4} &= x^2 - 5x + (\tfrac{5}{2})^2 & & \\ y + \tfrac{25}{4} &= (x - \tfrac{5}{2})^2 & &\mid - \tfrac{25}{4} \\ y &= (x - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{25}{4} & & \qquad Min\big(\tfrac{5}{2} \mid -\tfrac{25}{4}\big) \end{aligned}$$

↑ Scheitelform

Wie kann die Scheitelform der Parabel $y = x^2 - 6x + 5$ ermittelt werden?

Wir addieren nach einer Umformung auf beiden Seiten die binomische Ergänzung:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 5 \quad &| -5 \\ y - 5 &= x^2 - 6x &| +9 \\ y + 4 &= \underbrace{x^2 - 6x + 9} \\ y + 4 &= \quad (x-3)^2 &| -4 \\ y &= (x-3)^2 - 4 \quad & S(3 \,|\, -4) \end{aligned}$$

1. Bestimme den Scheitel (Minimum bzw. Maximum) der Parabel:

   a) $y = (x+5)^2$ b) $y = (x-4)^2 - 2$

   c) $y = x^2 - 2x$ d) $y = x^2 - 8x + 12$

   e) $y = x^2 + 10x + 30$ f) $y = x^2 + 4x$

   g) $y = -x^2 - 2x$ h) $y = -x^2 + 6x - 5$

2. Bestimme die Nullstellen der Parabel:

   a) $y = x^2 - x - 20$ b) $y = 2x^2 - 5x - 3$

Ergebnisse:

1. a) $Min(-5 \,|\, 0)$ b) $Min(4 \,|\, -2)$

   c) $Min(1 \,|\, -1)$ d) $Min(4 \,|\, -4)$

   e) $Min(-5 \,|\, 5)$ f) $Min(-2 \,|\, -4)$

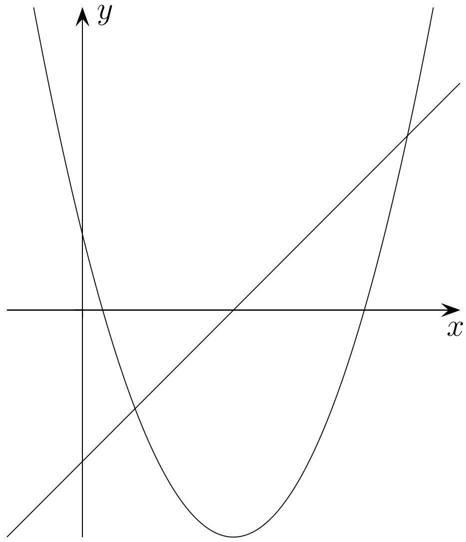
   g) $Max(-1 \,|\, 1)$ h) $Max(3 \,|\, 4)$

Die Nullstellen sind die Schnittstellen mit der x-Achse.
Der y-Wert ist hier wie groß?

2. a) $x_1 = 5;\ x_2 = -4$

   b) $x_1 = 3;\ x_2 = -\frac{1}{2}$

↑ Parabeln GTR



Gegeben sind eine Parabel $y = x^2 - 4x + 1$ und eine Gerade $y = x - 2$.

Ermittle mit dem GTR

a) die Nullstellen und den Scheitel der Parabel,

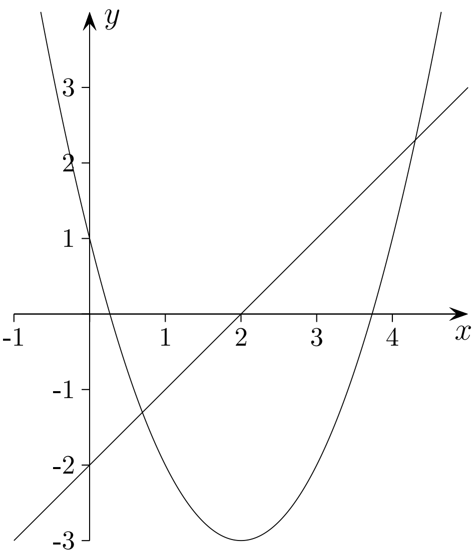
b) die Schnittpunkte von Parabel und Gerade,

c) die fehlenden Koordinaten der Parabelpunkte $A(0{,}5\,|\quad)$, $B(3{,}5\,|\quad)$, $C(4{,}5\,|\quad)$, $D(\quad|\,-2{,}5)$,

d) die Bereiche auf der x-Achse, in denen die y-Werte der Parabelpunkte mindestens 3 sind,

e) die Entfernung des Parabelpunkts $E(4{,}4\,|\quad)$ vom Ursprung.

↑ Parabeln GTR



Gegeben sind eine Parabel $y = x^2 - 4x + 1$ und eine Gerade $y = x - 2$.

Ermittle mit dem GTR

a) die Nullstellen und den Scheitel der Parabel, Nullstellen (zero) $x_1 = 0{,}268$, $x_2 = 3{,}732$
Scheitel (minimum) $S(2 \mid -3)$

b) die Schnittpunkte von Parabel und Gerade, Schnittpunkte (intersect)
$A(0{,}697 \mid -1{,}303)$, $B(4{,}303 \mid 2{,}303)$

c) die fehlenden Koordinaten der Parabelpunkte $A(0{,}5 \mid \quad)$, $B(3{,}5 \mid \quad)$, $C(4{,}5 \mid \quad)$

y-Koordinaten (value) $A(0{,}5 \mid -0{,}75)$, $B(3{,}5 \mid -0{,}75)$, $C(4{,}5 \mid 3{,}25)$

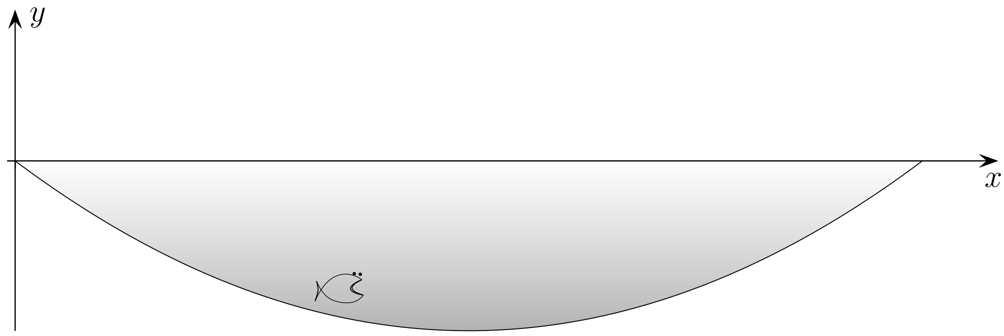
x-Koordinaten (hier \Y3 $= -2\ 5$, intersect) $D_1(1{,}293 \mid -2{,}5)$, $D_2(2{,}707 \mid -2{,}5)$

d) die Bereiche auf der x-Achse, in denen die y-Werte der Parabelpunkte mindestens 3 sind,

(hier \Y3 $= 3$, intersect) $x \leq -0{,}449$
$4{,}449 \leq x$

e) die Entfernung des Parabelpunkts $E(4{,}4 \mid \quad)$ vom Ursprung. $E(4{,}4 \mid 2{,}76)$
Pythagoras $d = 5{,}194$

↑ Teich-Aufgabe ohne GTR



Das Profil eines kreisförmigen Teiches wird durch die Parabelgleichung $y = \frac{1}{16}(x^2 - 12x)$ beschrieben (Angaben in m).
Alle Berechnungen sollen <u>ohne</u> GTR durchgeführt werden.

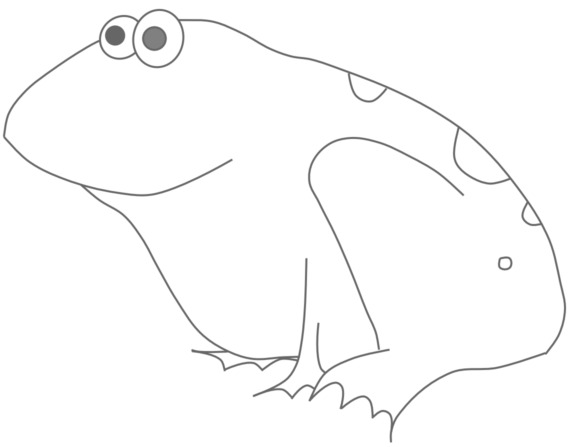
a) Ermittle den Durchmesser des Teichs.

b) Wie groß ist die maximale Tiefe?

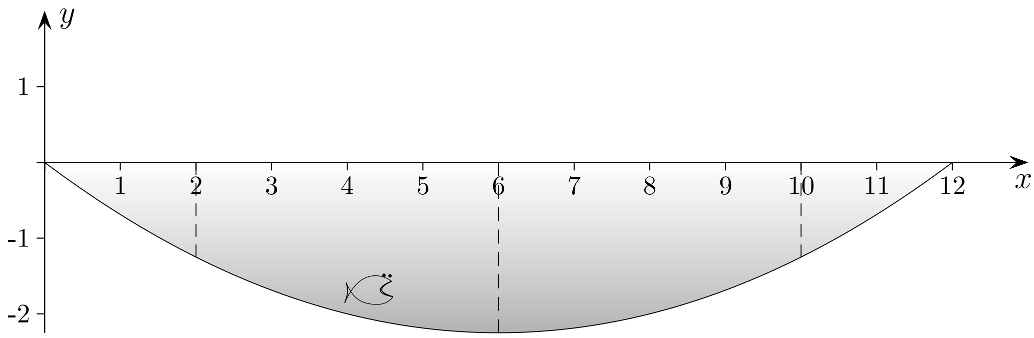
c) Wie tief ist der Teich $2\,m$ vom Ufer entfernt?

d) In welchem Bereich ist der Teich mindestens $2\,m$ tief?

e) Schätze den Flächeninhalt der Profilfläche.



↑ Teich-Aufgabe ohne GTR



Das Profil eines kreisförmigen Teiches wird durch die Parabelgleichung $y = \frac{1}{16}(x^2 - 12x)$ beschrieben (Angaben in m).
Alle Berechnungen sollen <u>ohne</u> GTR durchgeführt werden.

a) Ermittle den Durchmesser des Teichs.

Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 12$
Durchmesser $d = 12\,m$

b) Wie groß ist die maximale Tiefe?

y-Wert für $x = 6$
Tiefe $t_{\max} = -2{,}25\,m$

c) Wie tief ist der Teich $2\,m$ vom Ufer entfernt?

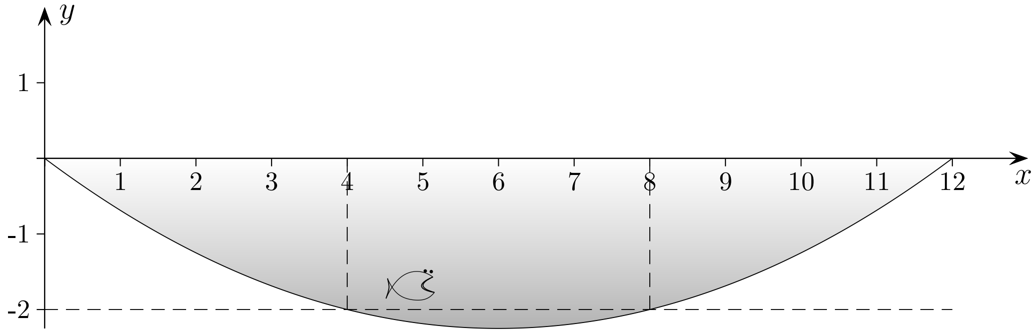
y-Wert für $x = 2$ oder $x = 10$
Tiefe in $2\,m$ vom Ufer entfernt $t = -1{,}25\,m$

d) In welchem Bereich ist der Teich mindestens $2\,m$ tief?

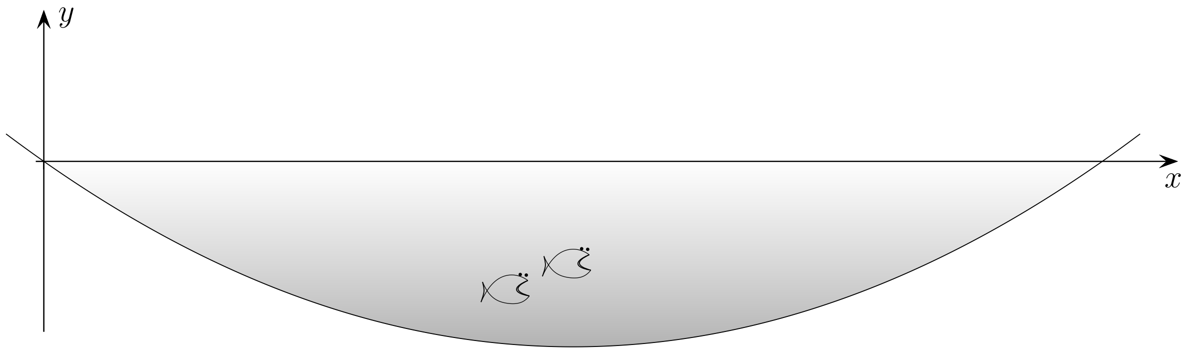
Gleichung $\frac{1}{16}(x^2 - 12x) = -2$
$x_1 = 4$, $x_2 = 8$
Bereich $4 \leq x \leq 8$
andere Schreibweise als Intervall $[4; 8]$

e) Schätze den Flächeninhalt der Profilfläche.

$12 \cdot 1{,}5 = 18\,(m^2)$
Das Ergebnis ist exakt, wie wir in Jg. 11 sehen werden.



↑ Teich-Aufgabe GTR



Das Profil eines kreisförmigen Teiches wird durch die Parabelgleichung $y = \frac{1}{20}(x^2 - 14x)$ beschrieben (Angaben in m).
Alle Berechnungen sollen <u>mit</u> GTR durchgeführt werden.

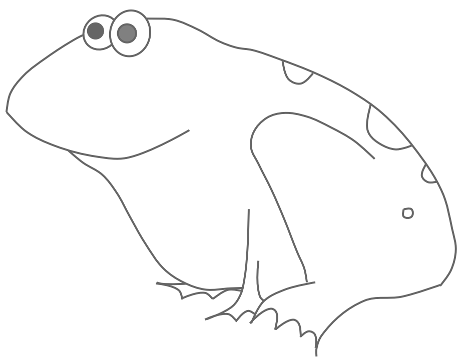
a) Ermittle den Durchmesser des Teichs.

b) Wie groß ist die maximale Tiefe?

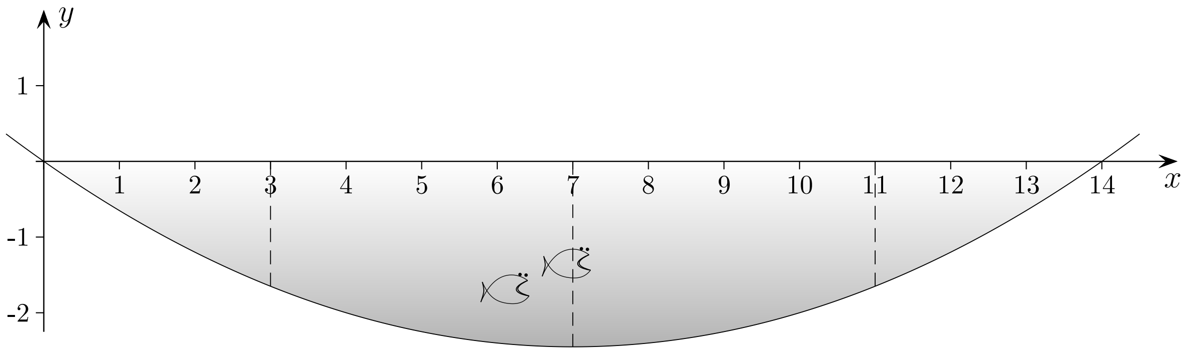
c) Wie tief ist der Teich $3\,m$ vom Ufer entfernt?

d) In welchem Bereich ist der Teich mindestens $2\,m$ tief?

e) Schätze den Flächeninhalt der Profilfläche.



↑ Teich-Aufgabe GTR



Das Profil eines kreisförmigen Teiches wird durch die Parabelgleichung $y = \frac{1}{20}(x^2 - 14x)$ beschrieben (Angaben in m).
Alle Berechnungen sollen mit GTR durchgeführt werden.

a) Ermittle den Durchmesser des Teichs.

Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 14$
Durchmesser $d = 14\,m$

b) Wie groß ist die maximale Tiefe?

y-Wert für $x = 7$
Tiefe $t_{\max} = -2{,}45\,m$

c) Wie tief ist der Teich $3\,m$ vom Ufer entfernt?

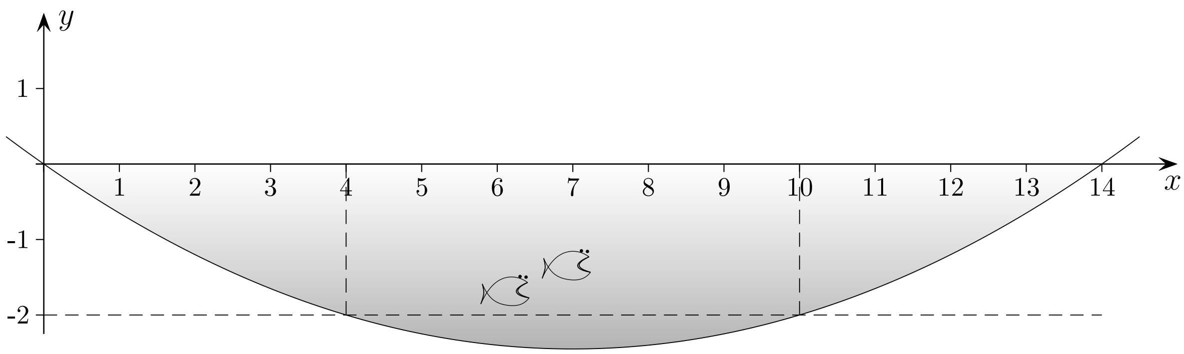
y-Wert für $x = 3$ oder $x = 11$
Tiefe in $3\,m$ vom Ufer entfernt $t = -1{,}65\,m$

d) In welchem Bereich ist der Teich mindestens $2\,m$ tief?

Gleichung $\frac{1}{20}(x^2 - 14x) = -2$
$x_1 = 4$, $x_2 = 10$
Bereich $4 \le x \le 10$
andere Schreibweise als Intervall $[4; 10]$

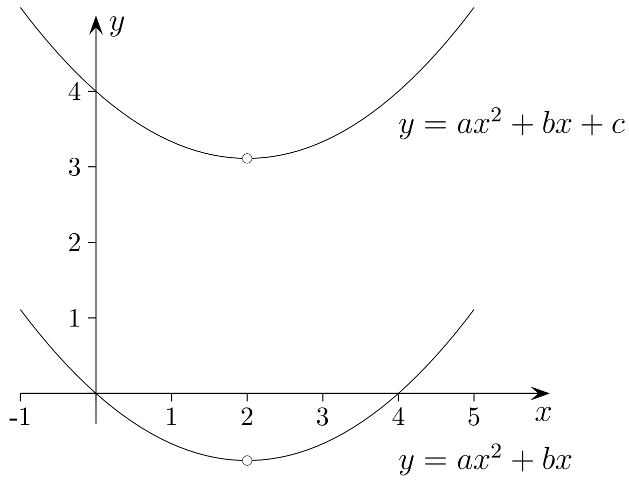
e) Schätze den Flächeninhalt der Profilfläche.

$14 \cdot 1{,}6 = 22{,}4\,(m^2)$
exakt 22,8667



↑ Scheitel einer Parabel

Der x-Wert des Scheitels kann auch ohne binomische Ergänzung ermittelt werden. Entnehme dem Folgenden die zu Grunde liegende Idee.



Nullstellen der Parabel $y = ax^2 + bx$

In den Nullstellen ist die y-Koordinate Null.

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx \\ 0 &= x(ax + b) \\ & \quad x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

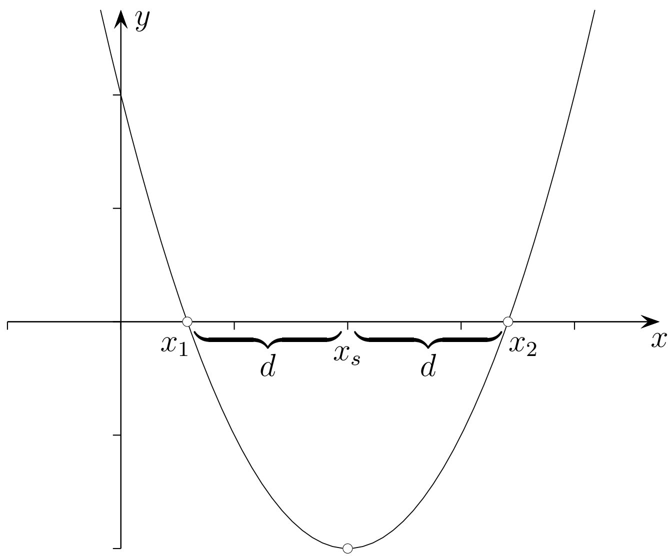
$$\Longrightarrow \qquad x_{\text{Scheitel}} = -\frac{b}{2a}$$

Beispiele:

1. $y = x^2 - 6x + 13$ $\quad S(3 \mid 4)$
2. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ $\quad S(4 \mid -5)$
3. $y = 3x^2 + 12x + 5$ $\quad S(-2 \mid -7)$
4. $y = -x^2 + 8x - 6$ $\quad S(4 \mid 10)$

↑ Scheitel einer Parabel Alternative

Der x-Wert des Scheitels kann unmittelbar angegeben werden.
Entnehme dem Folgenden die zu Grunde liegende Idee.



Nullstellen:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ 0 &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \end{aligned}$$

pq-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \underbrace{\sqrt{}}_{d}$$

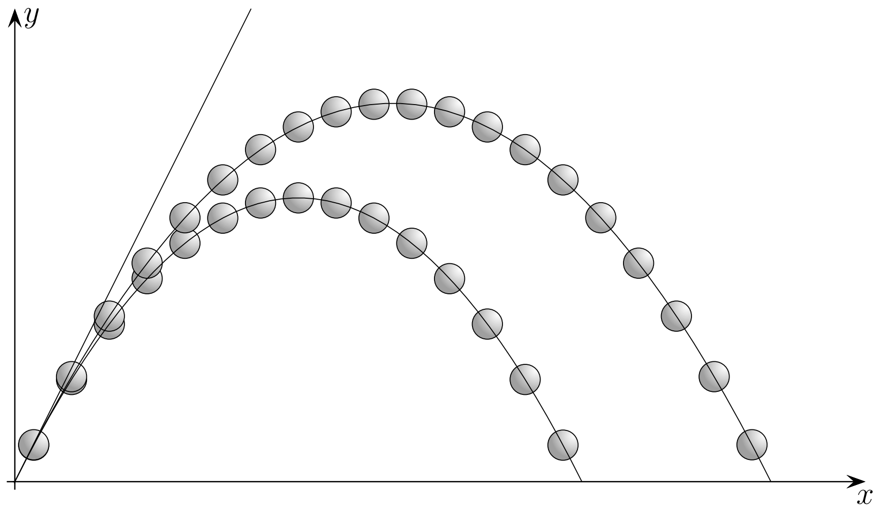
$$\Longrightarrow \qquad x_{\text{Scheitel}} = -\frac{b}{2a}$$

Parabeln, die keine Nullstellen haben, können in y-Richtung verschoben werden,
jedoch geht c nicht in die Rechnung ein.

Beispiele:

1. $y = 2x^2 + 8x + 1$ $\qquad S(-2 \mid \ldots)$
2. $y = \frac{1}{4}x^2 + 6x - 3$ $\qquad S(-12 \mid \ldots)$
3. $y = 3x^2 - \frac{1}{5}x + 5$ $\qquad S(\frac{1}{30} \mid \ldots)$
4. $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 6$ $\qquad S(\frac{2}{3} \mid \ldots)$

↑ Wurfparabel (ohne GTR)



Ein Ball wird zweimal in die gleiche Richtung geworfen.
Die Flugbahnen werden durch $y = -\frac{1}{15}x^2 + 2x$ und $y = -\frac{1}{20}x^2 + 2x$ erfasst, Angaben in m.

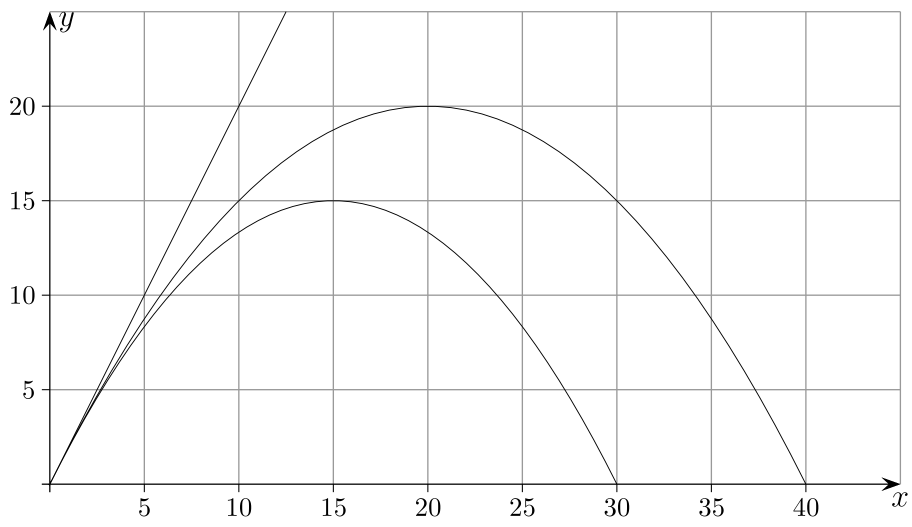
a) Wie weit flog der Ball jeweils?

b) Wie hoch flog der Ball jeweils?

c) In welchem Bereich hat der weiter fliegende Ball mindestens eine Höhe von $15\,m$?

d) Stelle eine Vermutung für die Gleichung der Geraden (Tangente) auf,
die die anfängliche Richtung des Balls beschreibt.
Begründe deine Vermutung.

↑ Wurfparabel (ohne GTR)



Ein Ball wird zweimal in die gleiche Richtung geworfen.
Die Flugbahnen werden durch $y = -\frac{1}{15}x^2 + 2x$ und $y = -\frac{1}{20}x^2 + 2x$ erfasst, Angaben in m.

a) Wie weit flog der Ball jeweils?

b) Wie hoch flog der Ball jeweils?

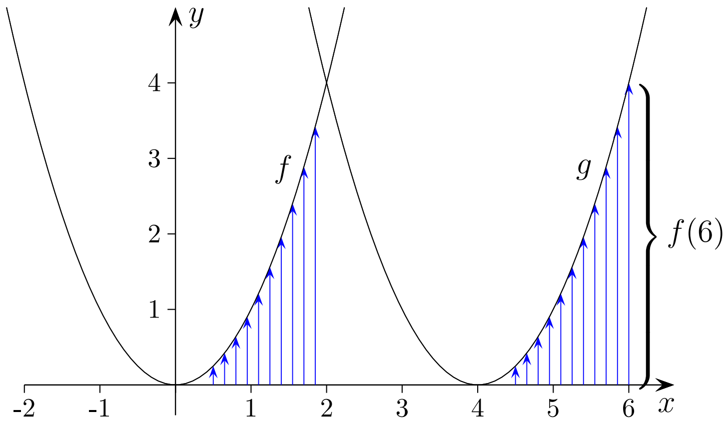
c) In welchem Bereich hat der weiter fliegende Ball mindestens eine Höhe von $15\,m$?

d) Stelle eine Vermutung für die Gleichung der Geraden (Tangente) auf,
die die anfängliche Richtung des Balls beschreibt.
Begründe deine Vermutung.

Die Schnittgleichung hat nur eine Lösung.

Die ganzzahligen Ergebnisse können anhand der Grafik überprüft werden.

↑ Funktionsschreibweise



$y = x^2$

$y = (x-4)^2$

$y = x^2 + 1$

Von nun an verwenden wir auch die Funktionsschreibweise:

$f(x) = x^2$

$g(x) = (x-4)^2$

$h(x) = x^2 + 1$

Jeder Zahl x wird der (eindeutige) Funktionswert $f(x)$ $(= y)$ zugeordnet. Mit dieser Schreibweise können zu verschiedenen x-Werten die zugehörigen y-Werte leichter angegeben werden und Formulierungen wie $f(x) = f(-x)$, $g(x) = f(x-4)$, $h(x) = f(x)+1$ sind möglich (in Worten?).

Rechne aus:

$f(4)$

$g(5)$

$h(3)$

$f(-3)$

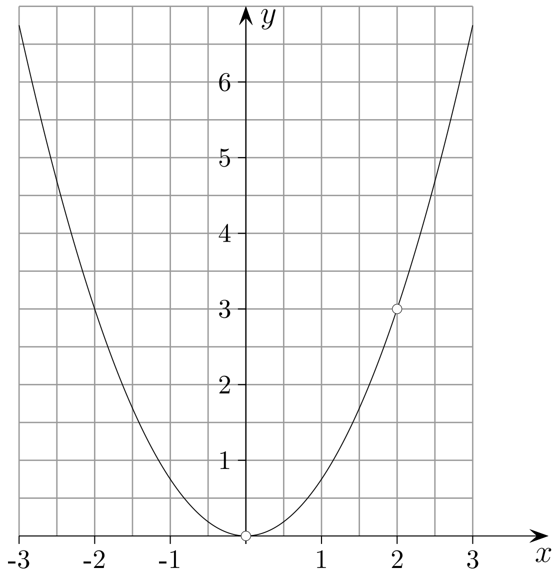
$g(-1)$

$h(-2)$

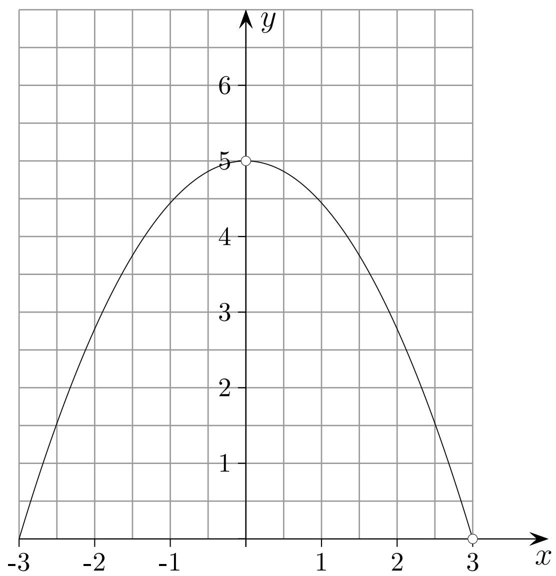
↑ Parabelgleichung ermitteln

Ermittle die Parabelgleichung.

a)



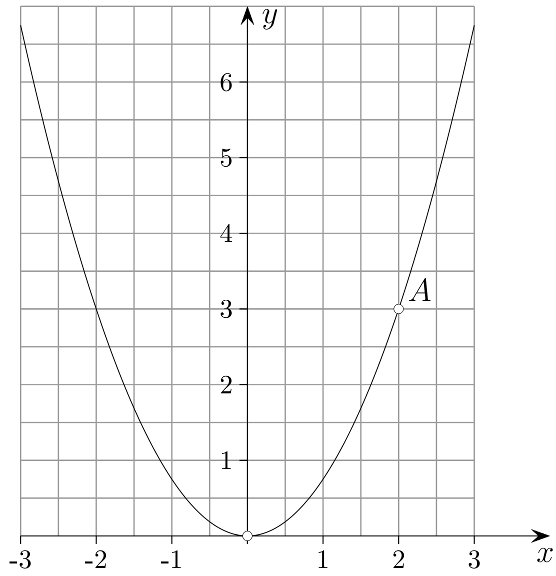
b)



↑ Parabelgleichung ermitteln

Ermittle die Parabelgleichung.

a)



Ansatz $y = ax^2$

$A(2 \mid 3)$

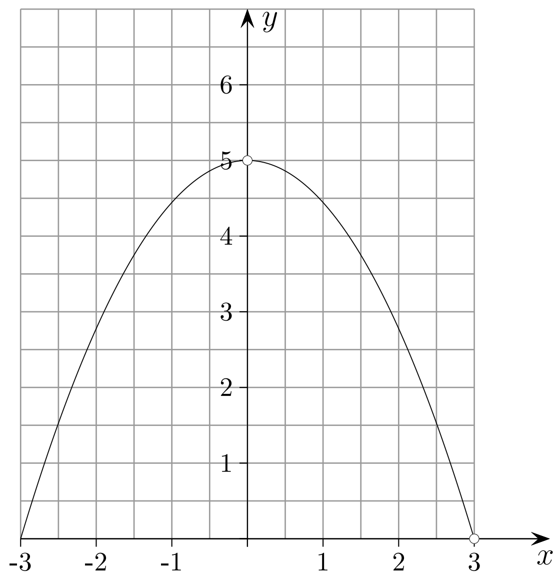
Koordinaten einsetzen $3 = 4a$

nach a umstellen $a = \frac{3}{4}$

$$y = \frac{3}{4}x^2$$

Probe $f(2) = 3$

b)



Ansatz $y = -ax^2 + 5$

$N(3 \mid 0)$

Koordinaten einsetzen $0 = -9a + 5$

nach a umstellen $a = \frac{5}{9}$

$$y = -\frac{5}{9}x^2 + 5$$

Probe $f(3) = 0$

↑ Parabelgleichung ermitteln

Ermittle die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ der Parabel
mit dem angegebenen Scheitel S und dem Punkt A auf der Parabel.

a) $S(2 \mid 1),\ A(0 \mid 2)$

b) $S(2 \mid 4),\ A(-2 \mid 0)$

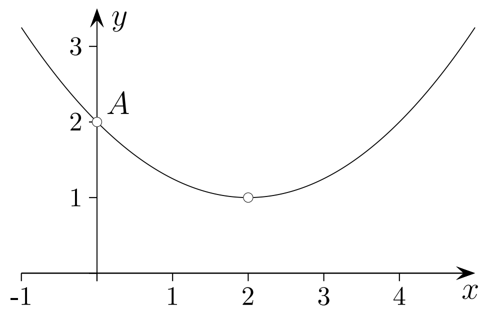
c) $S(-1 \mid -2),\ A(2 \mid 0)$

↑ Parabelgleichung ermitteln

Ermittle die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ der Parabel
mit dem angegebenen Scheitel S und dem Punkt A auf der Parabel.

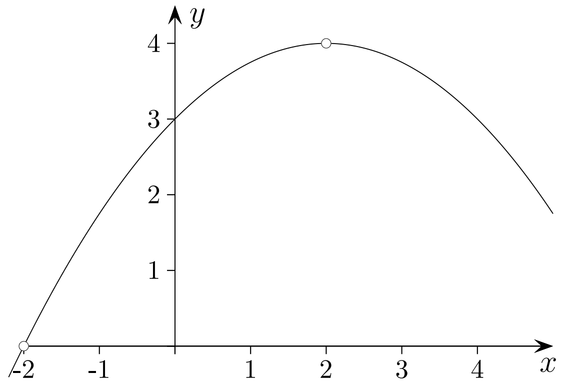
a) $S(2 \mid 1),\ A(0 \mid 2)$

$$\begin{aligned}
\text{Ansatz in Scheitelform} \qquad & y = a(x-2)^2 + 1 \\
A(0 \mid 2), \qquad 4a + 1 &= 2 \\
a &= \frac{1}{4} \\
y &= \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1 \\
y &= \frac{1}{4}x^2 - x + 2
\end{aligned}$$



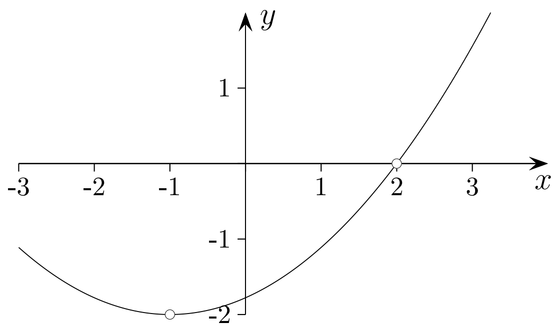
b) $S(2 \mid 4),\ A(-2 \mid 0)$

$$\begin{aligned}
\text{Ansatz} \qquad & y = a(x-2)^2 + 4 \\
A(-2 \mid 0), \qquad 16a + 4 &= 0 \\
a &= -\frac{1}{4} \\
y &= -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4 \\
y &= -\frac{1}{4}x^2 + x + 3
\end{aligned}$$



c) $S(-1 \mid -2),\ A(2 \mid 0)$

$$\begin{aligned}
\text{Ansatz} \qquad & y = a(x+1)^2 - 2 \\
A(2 \mid 0), \qquad 9a - 2 &= 0 \\
a &= \frac{2}{9} \\
y &= \frac{2}{9}(x+1)^2 - 2 \\
y &= \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{16}{9}
\end{aligned}$$



↑ Übung

1. *<u>mit</u> GTR, Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen gerundet*

   Das Profil eines kreisförmigen Teiches wird durch die Parabelgleichung $y = 0{,}059x^2 - 0{,}65x$ beschrieben (Angaben in m).

   a) Ermittle den Durchmesser des Teichs.

   b) Wie groß ist die maximale Tiefe?

   c) Die Punkte $A(1\,|\quad)$, $B(8\,|\quad)$, $C(\quad|-1)$ liegen auf der Parabel.
   Ermittle die fehlenden Koordinaten. Gib alle Möglichkeiten an.

   d) 60 cm vom Teichrand entfernt wächst senkrecht auf dem Teichboden eine 1,14 m lange Pflanze. Wie weit ragt sie aus dem Wasser?

2. *<u>ohne</u> GTR, alle Zwischenschritte sind aufzuschreiben*

   Anna spielt mit einem Wasserschlauch im Garten. Hält sie den Wasserschlauch in eine bestimmte Richtung, so bewegt sich das Wasser auf einer Parabel mit der Gleichung $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{3}x$ (Angaben in m).

   a) Ermittle wie weit Anna spritzt (der Strahl beginnt im Ursprung).

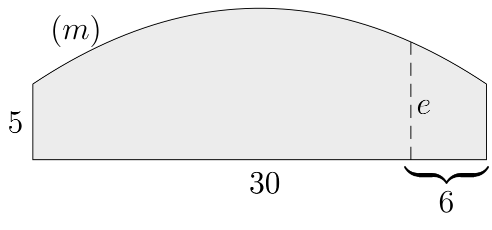
   b) Die Punkte $A(1\,|\quad)$, $B(8\,|\quad)$, liegen auf der Parabel.
   Ermittle die fehlenden Koordinaten.

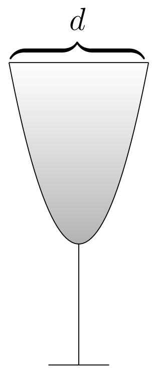
   c) An welchen Stellen (x-Werte) hat das Wasser eine Höhe von 4 m?

3. a) Ermittle die Gleichung einer Parabel (Scheitelpunktform),
   von der der Scheitel $S(3\,|\,4)$ und ein Parabelpunkt $A(-1\,|\,2)$ bekannt sind.

   b) Wie weit sind die beiden Punkte S und A voneinander entfernt?

4. Die Fassade einer Werkshalle hat die Form eines Rechtecks mit einer aufgesetzten Parabel. Die Fassade hat (an der höchsten Stelle) eine Höhe von 10 m und eine Breite von 30 m. Berechne die Länge der gestrichelten Linie e.





5. Ein Kelchglas hat die Form einer Normalparabel.
   Hinzu kommt ein 6 cm langer Stiel. Das ganze Glas ist 13 cm hoch.
   Wie groß ist der Durchmesser d der Öffnung?

↑ Übung, Ergebnisse

1. <u>mit</u> *GTR, Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen gerundet*

   Das Profil eines kreisförmigen Teiches wird durch die Parabelgleichung $y = 0{,}059x^2 - 0{,}65x$ beschrieben (Angaben in m).

   a) Ermittle den Durchmesser des Teichs. $11{,}02\,m$

   b) Wie groß ist die maximale Tiefe? $1{,}79\,m$

   c) Die Punkte $A(1 \mid \quad)$, $B(8 \mid \quad)$, $C(\quad \mid -1)$ liegen auf der Parabel. Ermittle die fehlenden Koordinaten. Gib alle Möglichkeiten an. $A(1 \mid -0{,}59)$, $B(8 \mid -1{,}42)$ $C_1(1{,}85 \mid -1)$, $C_2(9{,}17 \mid -1)$

   d) $60\,cm$ vom Teichrand entfernt wächst senkrecht auf dem Teichboden eine $1{,}14\,m$ lange Pflanze. Wie weit ragt sie aus dem Wasser? $0{,}77\,m$

2. <u>ohne</u> *GTR, alle Zwischenschritte sind aufzuschreiben*

   Anna spielt mit einem Wasserschlauch im Garten. Hält sie den Wasserschlauch in eine bestimmte Richtung, so bewegt sich das Wasser auf einer Parabel mit der Gleichung $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{3}x$ (Angaben in m).

   a) Ermittle wie weit Anna spritzt (der Strahl beginnt im Ursprung). $10\,m$

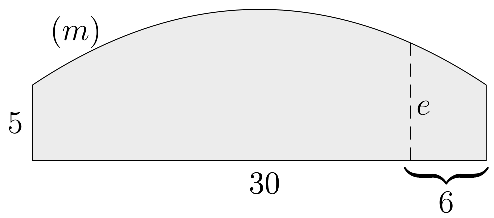
   b) Die Punkte $A(1 \mid \quad)$, $B(8 \mid \quad)$, liegen auf der Parabel. Ermittle die fehlenden Koordinaten. $A\left(1 \mid \frac{3}{2}\right)$, $B\left(8 \mid \frac{8}{3}\right)$

   c) An welchen Stellen (x-Werte) hat das Wasser eine Höhe von $4\,m$? $x_1 = 4$, $x_2 = 6$

3. a) Ermittle die Gleichung einer Parabel (Scheitelpunktform), von der der Scheitel $S(3 \mid 4)$ und ein Parabelpunkt $A(-1 \mid 2)$ bekannt sind. $y = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + 4$

   b) Wie weit sind die beiden Punkte S und A voneinander entfernt? $\sqrt{20}$

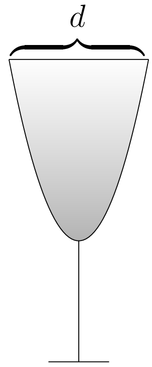
4. Die Fassade einer Werkshalle hat die Form eines Rechtecks mit einer aufgesetzten Parabel. Die Fassade hat (an der höchsten Stelle) eine Höhe von 10 m und eine Breite von 30 m. Berechne die Länge der gestrichelten Linie e.

   $y = -\frac{1}{45}x^2 + 10$

   $e = 8{,}2\,m$

5. Ein Kelchglas hat die Form einer Normalparabel. Hinzu kommt ein 6 cm langer Stiel. Das ganze Glas ist 13 cm hoch. Wie groß ist der Durchmesser d der Öffnung? $d = 2\sqrt{7}\,cm$

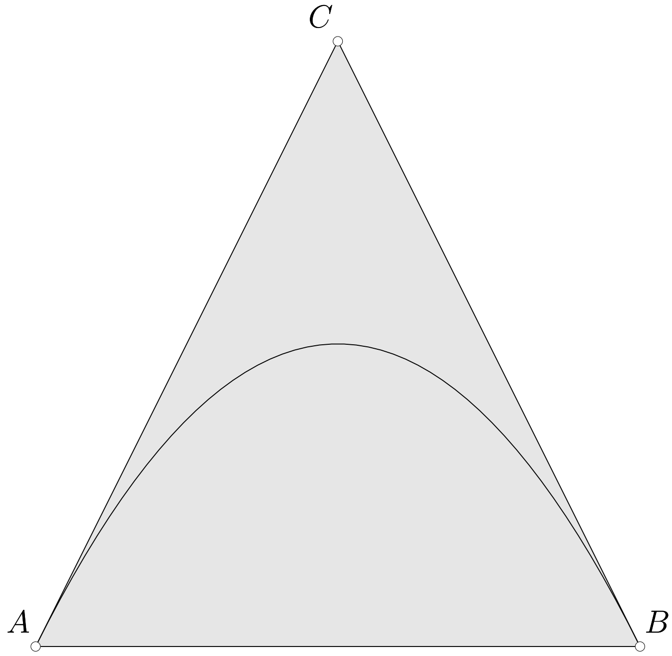
↑ Tangenten

1. Überprüfe zunächst <u>ohne</u> GTR, ob die Gerade eine Tangente der Parabel ist.
   Tipp: Denke an die Anzahl der gemeinsamen Punkte.

   a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 4x - 8$

   b) $f(x) = -\frac{1}{2}x(x-6), \quad y = x + 2$

2. Die Abbildung enthält die Parabel $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ und die Tangenten in den Nullstellen.



   Ermittle <u>mit</u> GTR vom Dreieck ABC

   a) den Flächeninhalt

   b) und den Umfang. *Tipp:* 2nd DRAW | 5: Tangent(Stelle).

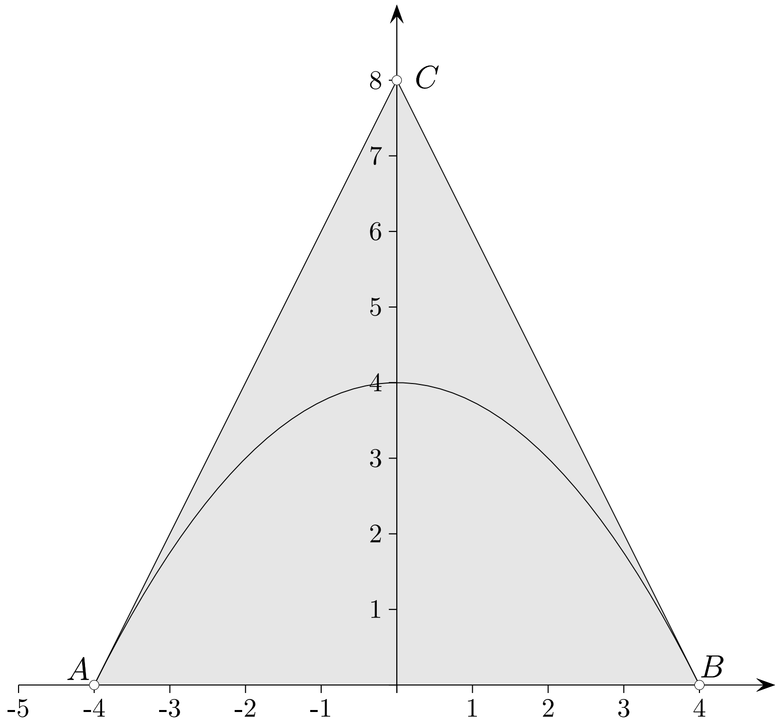
↑ Tangenten

1. Überprüfe zunächst <u>ohne</u> GTR, ob die Gerade eine Tangente der Parabel ist.
   Tipp: Denke an die Anzahl der gemeinsamen Punkte.

   a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 4x - 8$ Berührstelle $x = 4$

   b) $f(x) = -\frac{1}{2}x(x-6), \quad y = x + 2$ Berührstelle $x = 2$

2. Die Abbildung enthält die Parabel $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ und die Tangenten in den Nullstellen.



   Ermittle <u>mit</u> GTR vom Dreieck ABC

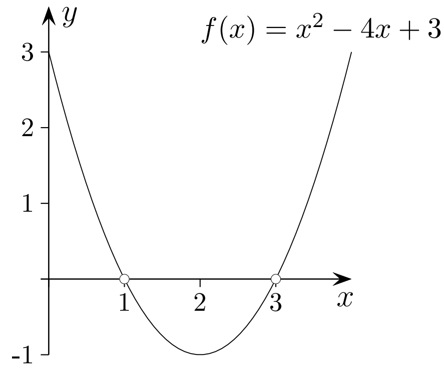
   a) den Flächeninhalt Tangentengleichungen $y = \pm 2x + 8,\ A = 32\,FE$ (Flächeneinheiten)

   b) und den Umfang. *Tipp:* 2nd DRAW | 5: Tangent(Stelle).
   $U = 25{,}889\,LE$ (Längeneinheiten)

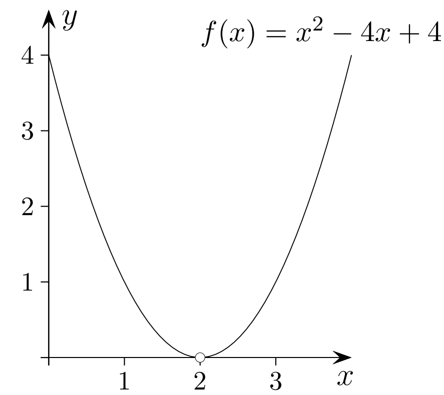
↑ Quadratische Gleichung, Anzahl der Lösungen

Erläutere die Zusammenhänge.

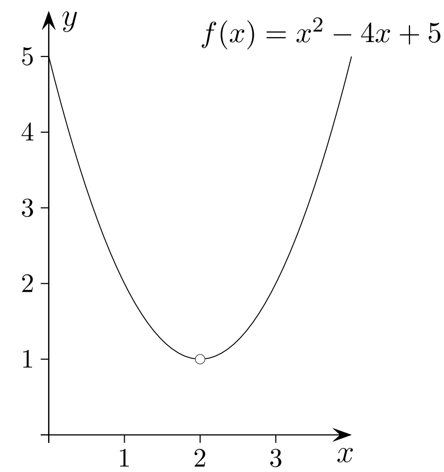
$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= 1 \\ x^2-4x+3 &= 0 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \underbrace{\sqrt{4-3}}_{1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= 0 \\ x^2-4x+4 &= 0 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \underbrace{\sqrt{4-4}}_{0} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= -1 \\ x^2-4x+5 &= 0 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \underbrace{\sqrt{4-5}}_{\text{existiert nicht}} \end{aligned}$$



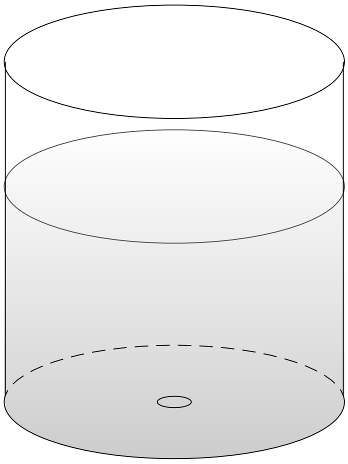
↑ Begründungen

a) Begründe den folgenden Satz:
Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat für $q < 0$ stets zwei Lösungen.

b) Untersuche, ob auch die Umkehrung gilt:
Wenn eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zwei Lösungen besitzt, dann gilt $q < 0$.

c) Begründe (schwieriger) die Verschärfung des Satzes aus a): Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat für $q < 0$ stets eine positive und eine negative Lösung.

↑ Ausfließendes Wasser



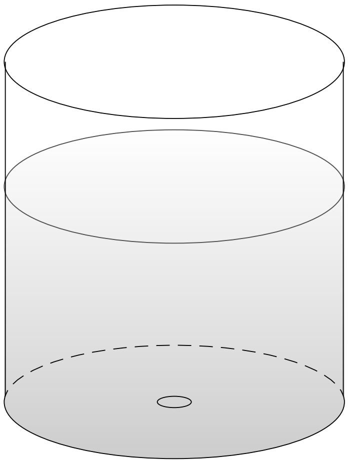
Ein zylinderförmiges Gefäß ist mit Wasser gefüllt, das durch eine Öffnung im Boden entweicht. Der Zusammenhang von verstrichener Zeit x (in Sekunden) und Höhe des Wasserspiegels y (in cm) wird durch $f(x) = (a - bx)^2$ erfasst.

Die anfängliche Wasserhöhe ($x = 0$) beträgt $25\,cm$.
Das Gefäß ist nach 100 Sekunden leer.

a) Wie sind dann a und b zu wählen?

b) Wie hoch ist der Wasserspiegel nach 40 Sekunden?

↑ Ausfließendes Wasser

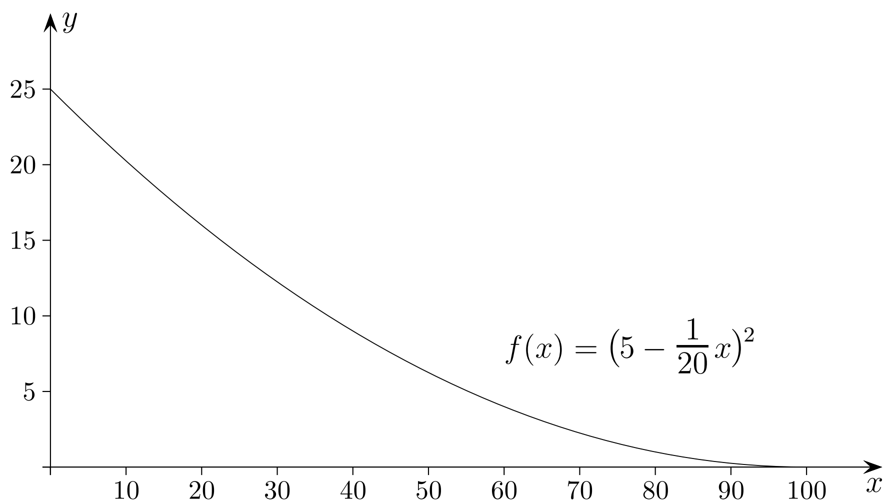


Ein zylinderförmiges Gefäß ist mit Wasser gefüllt, das durch eine Öffnung im Boden entweicht. Der Zusammenhang von verstrichener Zeit x (in Sekunden) und Höhe des Wasserspiegels y (in cm) wird durch $f(x) = (a - bx)^2$ erfasst.

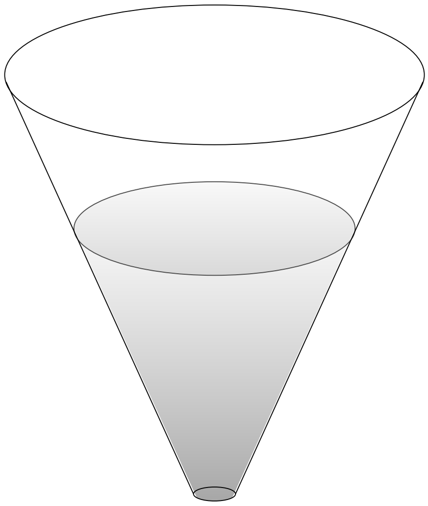
Die anfängliche Wasserhöhe ($x = 0$) beträgt $25\,cm$.
Das Gefäß ist nach 100 Sekunden leer.

a) Wie sind dann a und b zu wählen?

b) Wie hoch ist der Wasserspiegel nach 40 Sekunden? $9\,cm$



↑ Ausfließendes Wasser



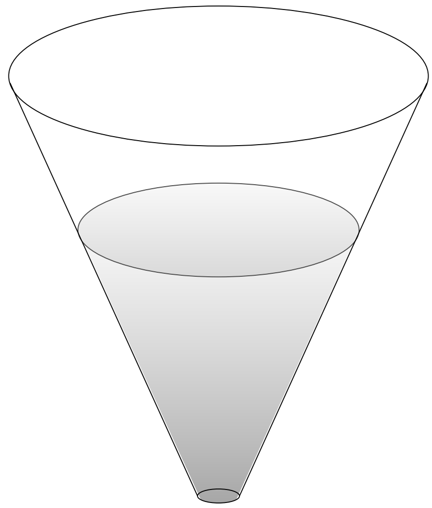
Ein kegelförmiges Gefäß ist mit Wasser gefüllt, das durch eine Öffnung im Boden entweicht.
Der Zusammenhang von verstrichener Zeit x (in Sekunden) und Höhe des Wasserspiegels y (in cm) wird durch $f(x) = \sqrt{a - bx}$ erfasst.

Die anfängliche Wasserhöhe ($x = 0$) beträgt $25\,cm$.
Das Gefäß ist nach 100 Sekunden leer.

a) Wie sind dann a und b zu wählen?

b) Wie hoch ist der Wasserspiegel nach 36 Sekunden?

↑ Ausfließendes Wasser

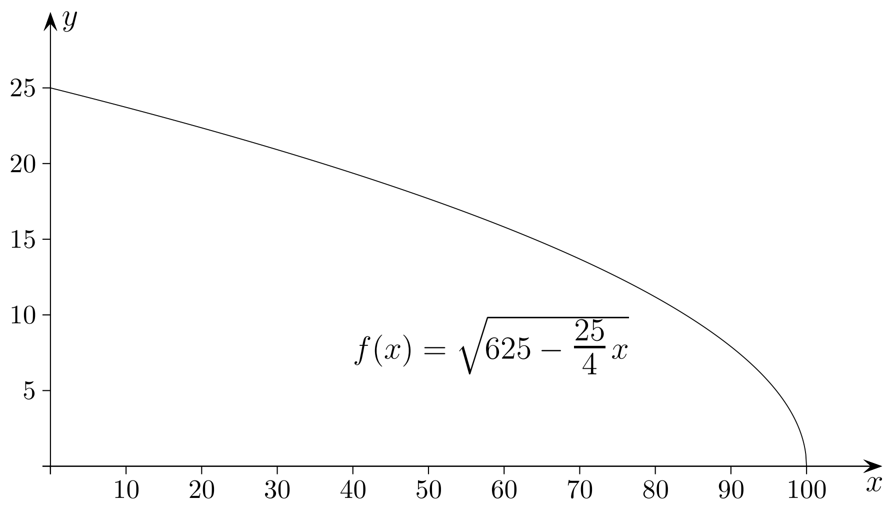


Ein kegelförmiges Gefäß ist mit Wasser gefüllt, das durch eine Öffnung im Boden entweicht.
Der Zusammenhang von verstrichener Zeit x (in Sekunden) und Höhe des Wasserspiegels y (in cm) wird durch $f(x) = \sqrt{a - bx}$ erfasst.

Die anfängliche Wasserhöhe ($x = 0$) beträgt $25\,cm$.
Das Gefäß ist nach 100 Sekunden leer.

a) Wie sind dann a und b zu wählen?

b) Wie hoch ist der Wasserspiegel nach 36 Sekunden? $20\,cm$



↑ Anzahl der Lösungen

Gegeben ist die Gleichung $-x^2 = 2x + t$.
In welcher Weise hängt die Anzahl der Lösungen von t ab?
Veranschauliche den Zusammenhang.

↑ Anzahl der Lösungen

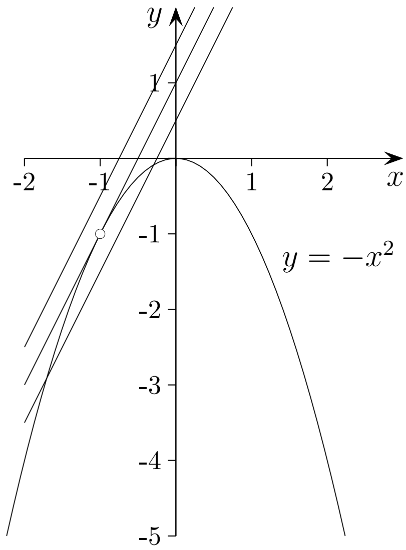
Gegeben ist die Gleichung $-x^2 = 2x + t$.
In welcher Weise hängt die Anzahl der Lösungen von t ab?
Veranschauliche den Zusammenhang.

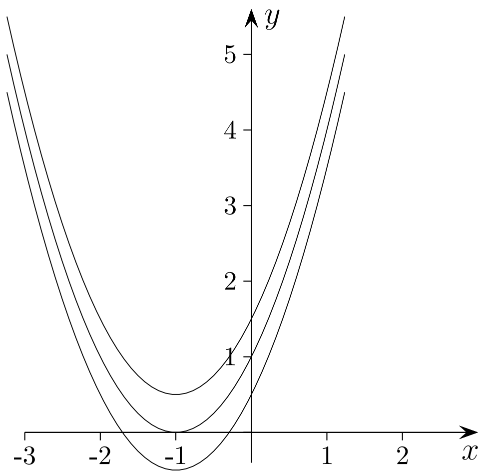
$$\begin{aligned} -x^2 &= 2x + t \\ 0 &= x^2 + 2x + t \\ x_{1/2} &= -1 \pm \sqrt{1-t} \end{aligned}$$

$t = 1$ eine Lösung

$t < 1$ zwei Lösungen

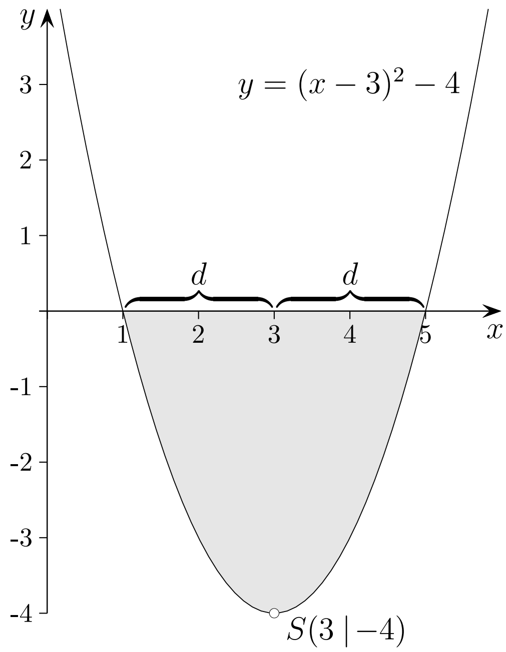
$t > 1$ keine Lösung





Betrachte die Anzahl der Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + t$.

↑ Quadratische Gleichung   alternativ



Die Nullstellen der Parabel können besonders leicht
aus der Scheitelform $y = (x-a)^2 + b$ ermittelt werden, $S(a\,|\,b)$.

<u>Nullstellen der Parabel:</u>

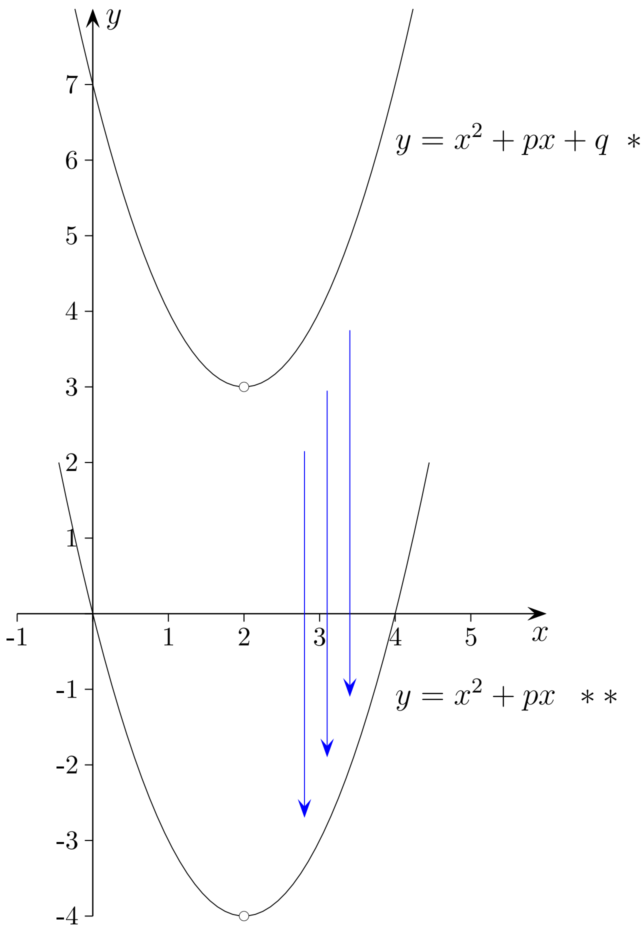
$$\begin{aligned}(x-3)^2 - 4 &= 0\\ (x-3)^2 &= 4\\ x-3 &= \pm\sqrt{4}\\ x_{1/2} &= 3 \pm 2\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}(x-a)^2 + b &= 0\\ (x-a)^2 &= -b\\ x-a &= \pm\sqrt{-\,b}\\ x_{1/2} &= a \pm \sqrt{-\,b}\end{aligned}$$

Wenn nun für $y = x^2 + px + q$ der Scheitel $S(a\,|\,b)$ bekannt wäre,
ergäbe sich die pq-Formel $x_{1/2} = a \pm \sqrt{-\,b}$ für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Auf die x-Koordinate des Scheitels S hat ein konstanter Summand keinen Einfluss.
$y = (x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ belegt, dass zur Scheitelstelle a der Koeffizient $-2a$ gehört,
d. h. $p = -2a$. Daraus ergibt sich a. Möglich ist aber auch der - vielleicht schon behandelte - folgende Weg:

↑ Scheitel einer Parabel

Auf die x-Koordinate des Scheitels S hat ein konstanter Summand keinen Einfluss.
Er kann auf null gesetzt werden.



<u>Nullstellen der verschobenen Parabel $y = x^2 + px$</u>

In den Nullstellen ist die y-Koordinate Null.

$$0 = x^2 + px$$
$$0 = x(x + p)$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = -p$$

$$\Longrightarrow \quad x_{\text{Scheitelvon } **} = ?$$
$$y_{\text{Scheitel von } *} = ?$$

↑ pq-Formel

Wir fügen nun alles zusammen.

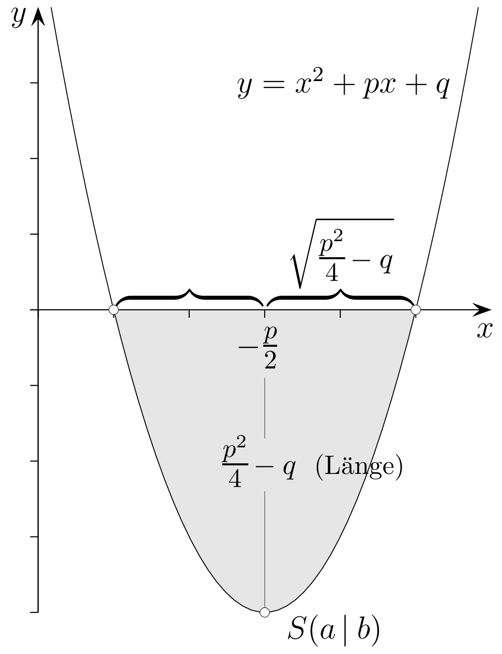
$$y = x^2 + px + q$$

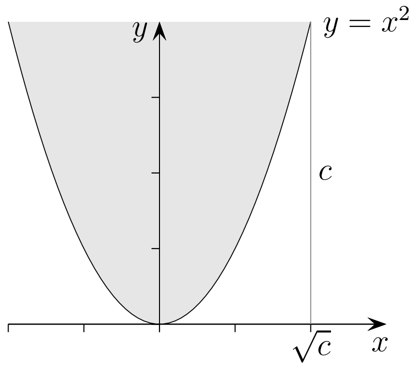
$$\begin{aligned} x_{\text{Scheitel}} &= -\frac{p}{2} \\ y_{\text{Scheitel}} &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2}\right) + q = \ldots = -\frac{p^2}{4} + q \end{aligned}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = a \pm \sqrt{-b} \qquad\qquad S(a\,|\,b)$$

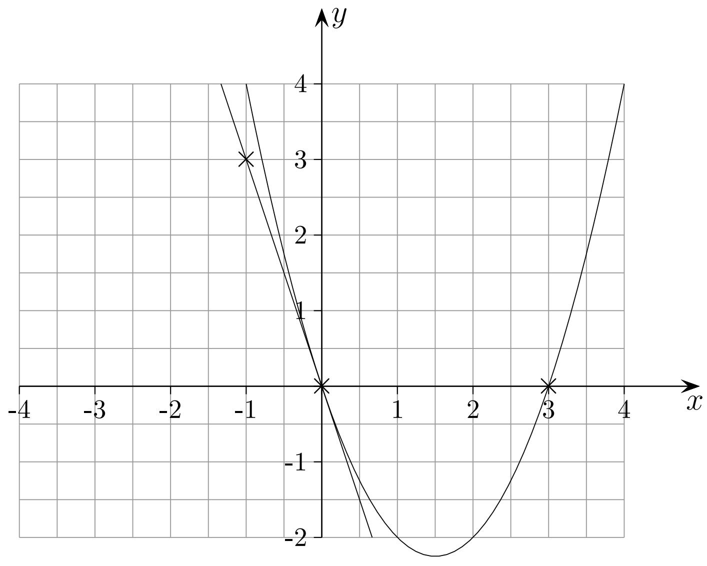
$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$





↑ Parabeln zeichnen

1. Zeichne die Parabel $y = x^2 - 3x$.

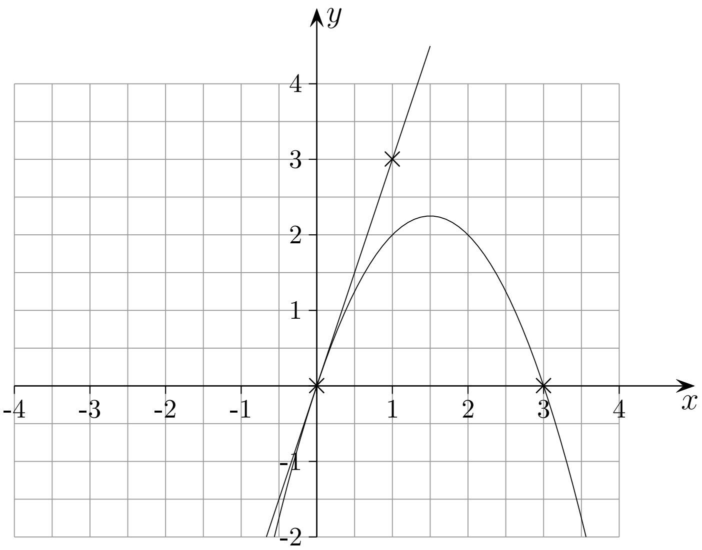


$x^2 - 3x = x(x-3) = 0$ Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

Tangente $y = -3x$, beachte: nur ein Schnittpunkt mit der Parabel an der Stelle $x = 0$

↑ Parabeln zeichnen

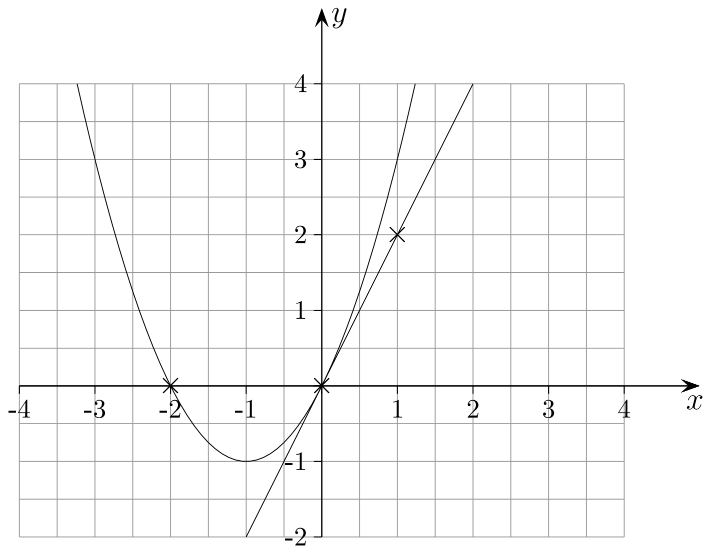
2. Zeichne die Parabel $y = -x^2 + 3x$.



$-x^2 + 3x = -x(x-3) = 0$ Nullstellen $x_1 = 0,\ x_2 = 3$

Tangente $y = 3x$, beachte: nur ein Schnittpunkt an der Stelle $x = 0$

3. Zeichne die Parabel $y = x^2 + 2x$.



$x^2 + 2x = x(x+2) = 0$ Nullstellen $x_1 = 0,\ x_2 = -2$

Tangente $y = 2x$, beachte: nur ein Schnittpunkt an der Stelle $x = 0$

Aus Symmetriegründen kann stets die Tangente in der 2. Nullstelle gezeichnet werden.