

# Logik

Eine mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Wir bezeichnen Aussagen mit großen Buchstaben. Aussagen können verknüpft werden mit:

oder  $A \vee B$ , nur falsch, wenn beide Aussagen falsch sind  
und  $A \wedge B$ , nur wahr, wenn beide Aussagen wahr sind

Mathematische Aussagen sind meistens von der Form: *Wenn ... , dann ...* .  
auch wenn der Wortlaut anders ist.

*Wenn eine Zahl durch 2 und 5 teilbar ist, dann ist sie auch durch 10 teilbar.*

Eine derartige Aussage heißt Implikation, kurz:  $A \rightarrow B$  (aus  $A$  folgt  $B$  oder  $A$  impliziert  $B$ ).  
Hierbei ist  $A$  die Voraussetzung und  $B$  die Folgerung.

Die Umkehrung der Aussage  $A \rightarrow B$  lautet  $B \rightarrow A$ .

Sie kann, muss aber nicht richtig sein, falls  $A \rightarrow B$  richtig ist.

*Wenn es regnet, ist die Straße nass.*

*Umkehrung: Wenn die Straße nass ist, regnet es.*

Die Verneinung einer Aussage  $A$  heißt Negation von  $A$ , kurz:  $\neg A$ .

Die Negation einer wahren Aussage ist falsch, und umgekehrt.

Falls  $A \rightarrow B$  richtig ist, ist stets auch die sogenannte Kontraposition  $\neg B \rightarrow \neg A$  richtig.

Die Kontraposition der obigen Teilbarkeitsaussage lautet:

*Wenn eine Zahl nicht durch 10 teilbar ist, so ist sie nicht durch 2 und 5 teilbar.*

Die Zahl kann durch 2 teilbar sein oder durch 5, jedoch nicht durch 2 und 5,  
denn dann wäre sie durch 10 teilbar.

Falls die beiden Aussagen  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow A$

richtig sind, so sind die Aussagen  $A$  und  $B$  gleichwertig (äquivalent), kurz:  $A \leftrightarrow B$  .

$A$  ist genau dann wahr, falls  $B$  wahr ist.

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \quad \text{gemeint: } \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

Eine Aussage, die stets wahr ist, heißt Tautologie.

$$A \vee \neg A$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad \text{gemeint: } ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$$

1. Zerlege die Sätze in Voraussetzung und Folgerung:
  - a) Thales
  - b) Winkelsumme im Dreieck
  - c) Pythagoras
  - d) Strahlensätze
  
2. Formuliere die Umkehrung der Sätze aus der 1. Aufgabe.
  
3. Formuliere die Kontraposition der Sätze aus der 1. Aufgabe.
  
4. Falls  $A \rightarrow B$ , so nennt man  $A$  hinreichend für  $B$  und  $B$  notwendig für  $A$ .  
Erläutere diese Begriffsbildung.
  
5. Welche logische Beziehung ( $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ) besteht zwischen  $A$  und  $B$ ?
  - a)  $A$  : Eine Zahl ist durch 3 teilbar.  
 $B$  : Eine Zahl ist durch 9 teilbar.
  - b)  $A$  : Eine Zahl ist durch 3 und 2 teilbar.  
 $B$  : Eine Zahl ist durch 6 teilbar.
  - c)  $\neg A \rightarrow \neg B$
  - d)  $A \rightarrow B$  und  $\neg A \rightarrow \neg B$
  
6.  $A \rightarrow B$   
Wenn Frau L. Musik hört, benutzt sie einen Kopfhörer.  
Diese Aussage ist nur falsch, wenn . . . .

# Aussagenlogik

$A$	$B$	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$A$	$B$	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$A$	$B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$A \rightarrow B$  bedeutet nicht, dass  $B$  aus  $A$  herleitbar ist. Es geht in der Aussagenlogik nur um den Wahrheitsgehalt und nicht um Beweisbarkeit oder kausale Zusammenhänge. In den Jahren 2010 bis 2015, in denen die Population der Störche zunahm, stieg auch die Geburtenrate an.