Gleichungssysteme mit drei Variablen

Wir lösen ein Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren.

Die Idee war:
Die Gleichungen werden geeignet multipliziert, damit beim Addieren der rechten und linken Seiten eine Variable herausfällt (eliminiert wird) und eine Gleichung mit nur noch <u>einer</u> Variablen entsteht.

$$\begin{array}{rcrcl}
3x &+& 7y &=& 26 \;|\cdot(-5) \\
5x &-& 6y &=& 8 \;|\cdot 3 \\ \hline
-15x &-& 35y &=& -130 \\
15x &-& 18y &=& 24 \\ \hline
 & & -53y &=& -106 \\
 & & y &=& 2; \quad x = 4
\end{array}$$

Nun ein Gleichungssystem mit 3 Variablen.

Die Idee:
Aus dem Gleichungssystem mit 3 Variablen wird ein Gleichungssystem mit 2 Variablen erstellt.
Hierzu betrachte man die erste und zweite Gleichung.
Die beiden Gleichungen werden geeignet multipliziert, damit beim Addieren der rechten und linken Seiten eine Variable herausfällt (eliminiert wird) und eine Gleichung mit nur noch <u>zwei</u> Variablen entsteht.
Dann nehme man die erste (oder zweite) und die noch nicht verwendete dritte Gleichung. Diese beiden Gleichungen werden wieder geeignet multipliziert, damit beim Addieren <u>dieselbe</u> Variable wie vorher eliminiert wird und erneut eine Gleichung mit nur noch <u>zwei</u> Variablen entsteht.
Mit den beiden Gleichungen mit zwei Variablen verfährt man wie oben beschrieben.

$$\begin{array}{ll}
I & 2x + 3y + 4z = 20 \;|\cdot 3 \quad |\cdot 4 \\
II & 3x + 2y + 5z = 22 \;|\cdot(-2) \\
III & 4x + 5y + z = 17 \quad\quad |\cdot(-2) \\ \hline
I\cdot 3 & 6x + 9y + 12z = 60 \\
II\cdot(-2) & -6x - 4y - 10z = -44 \\ \hline
IV & 5y + 2z = 16 \\
 & \\
I\cdot 4 & 8x + 12y + 16z = 80 \\
III\cdot(-2) & -8x - 10y - 2z = -34 \\ \hline
V & 2y + 14z = 46 \\
IV & 5y + 2z = 16 \\ \hline
 & \ldots\; z = 3; \;\; y = 2; \;\; x = 1
\end{array}$$

Zur weiteren Übung:

$$\begin{array}{rcl}
2x + 3y - z &=& 11 \\
x - y + 2z &=& 3 \\
3x - 2y + 3z &=& 8
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x + 2y + 3z &=& 16 \\
2x + y + 4z &=& 19 \\
3x + 4y + z &=& 26
\end{array}$$

Gleichungssysteme mit drei Variablen

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & z & = & 11 \\ x & - & y & + & 2z & = & 3 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & 8 \\ \hline \end{array}$$

Lösung:

$x = 3$
$y = 2$
$z = 1$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 16 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & 19 \\ 3x & + & 4y & + & z & = & 26 \\ \hline \end{array}$$

Lösung:

$x = 4$
$y = 3$
$z = 2$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ -3x & - & 4y & + & 3z & = & -5 \\ \hline \end{array}$$

Lösung:

$x = 5$
$y = -1$
$z = 2$

$$\begin{array}{rcrcr} 10 & = & 2x & - & 2y \\ 14 & = & x & + & 3z \\ 0 & = & -4y & - & 3z \\ \hline \end{array}$$

Lösung:

$x = 2$
$y = -3$
$z = 4$

$$\begin{aligned} -z + 2y &= 3x - 3 \\ 2x &= -1 + 3y - z \\ 4 + 4y &= -2z \end{aligned}$$

Falls Brüche vorhanden sind, Gleichung geeignet multiplizieren.

1. sortieren

$$\begin{aligned} 4y + 2z &= -4 \\ 2x - 3y + z &= -1 \\ -3x + 2y - z &= -3 \end{aligned}$$

2. Matrix aufschreiben

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

3. LGS lösen, rref erzeugt die Diagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

4. Lösung ablesen

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= -4 \end{aligned}$$

Anzahl der Lösungen

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Es gibt nur die Lösung $z = a$.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es gibt keine Lösung ($0z = 1$).

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es gibt unendlich viele Lösungen. Bei 2 Gleichungen mit 3 Variablen kann eine Variable beliebig gewählt und die anderen können ausgerechnet werden.

Stufenform und Diagonalform

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-4x & + & 2y & + & 3z & = & -1 \\
x & + & y & + & 2z & = & -1 \\
x & + & 3y & + & z & = & 2 \\
\hline
\end{array}$$

Rechne von oben nach unten, um die Stufenform zu erhalten.

Stufenform

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-4x & + & 2y & + & 3z & = & -1 \\
 & - & 2y & + & z & = & -3 \\
 & & & + & 14z & = & -14 \\
\hline
\end{array}$$

Rechne von unten nach oben, um aus der Stufenform die Diagonalform zu erhalten.

Diagonalform

$$\begin{array}{ccccr}
x & & & = & 0 \\
 & y & & = & 1 \\
 & & z & = & -1 \\
\hline
\end{array}$$

Mit der Stufenform als Zwischenergebnis können Rechnungen verglichen und eventuelle Fehler aufgedeckt werden. Mit der Diagonalform wird die GTR-Ausgabe einsichtig.

GTR, rref erzeugt die Diagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Gleichungssysteme mit zwei Variablen
Gleichungssysteme Textaufgaben
Startseite