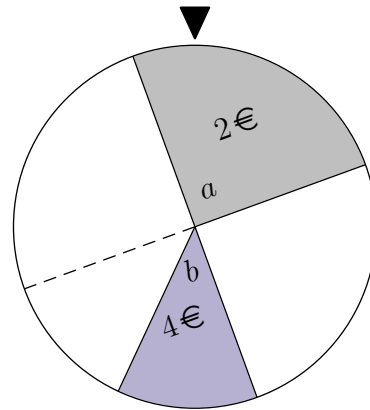
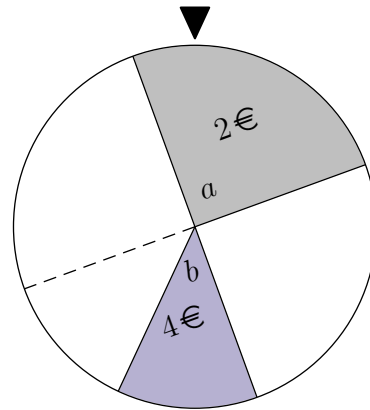


# Erwartungswert



Der Sektor  $a$  des Glücksrads bringt einen Gewinn von  $2\text{€}$ ,  
der Sektor  $b$  das Doppelte. Um den fairen Einsatz zu ermitteln,  
ist der durchschnittlich zu erwartende Gewinn pro Spiel zu berechnen.

# Erwartungswert



Der Sektor  $a$  des Glücksrads bringt einen Gewinn von  $2\text{€}$ ,  
der Sektor  $b$  das Doppelte. Um den fairen Einsatz zu ermitteln,  
ist der durchschnittlich zu erwartende Gewinn pro Spiel zu berechnen.

Angenommen, das Rad würde  $n$ -mal gedreht,  
 $a$  erschiene (idealerweise)  $\frac{1}{4} \cdot n$ -mal,  $b$   $\frac{1}{8} \cdot n$ -mal.

Der Gesamtgewinn wäre dann  $\frac{1}{4} \cdot n \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot n \cdot 4$ ,  
und der durchschnittliche Gewinn pro Spiel

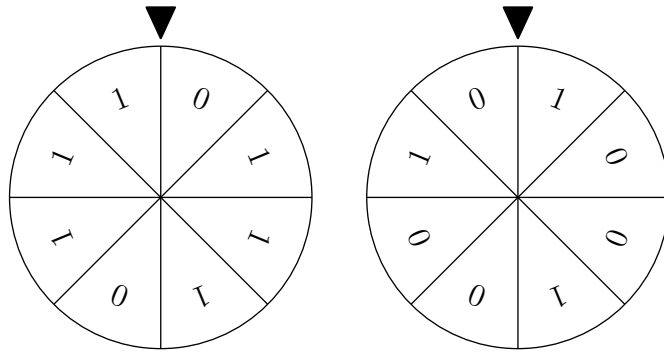
$$\frac{\frac{1}{4} \cdot n \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot n \cdot 4}{n} = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 = 1.$$

Der faire Einsatz beträgt also  $1\text{€}$ .

Um den durchschnittlich zu erwartenden Gewinn pro Spiel,  
den sogenannten Erwartungswert, zu berechnen, werden die möglichen Gewinne  
mit ihren Wahrscheinlichkeiten multipliziert und addiert.  
Verluste können als negative Gewinne berücksichtigt werden.

# Gewinnerwartung

1.

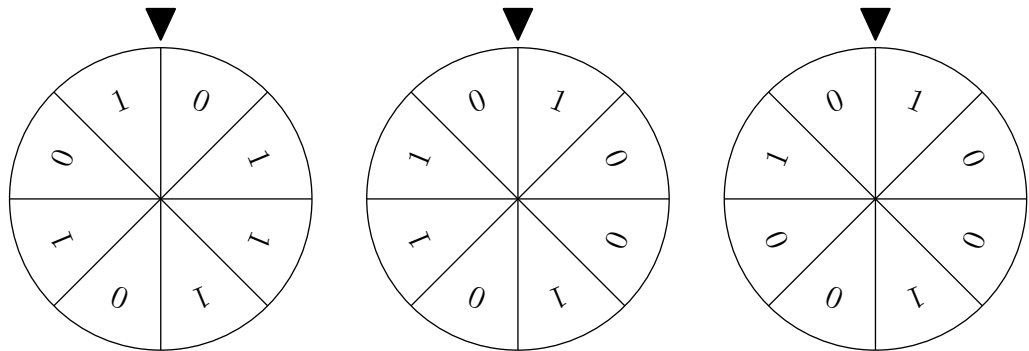


In einem Glücksspielautomaten sind 2 Glücksräder (siehe Abbildung) untergebracht. Die Glücksräder werden gleichzeitig gedreht.

Der Spieler erhält 2€ ausgezahlt, wenn beide Glücksräder eine 1 zeigen und 3€, wenn beide Glücksräder eine 0 zeigen.

Wie groß ist der faire Einsatz für das Spiel?

2.



In einem Glücksspielautomaten sind 3 Glücksräder (siehe Abbildung) untergebracht. Die Glücksräder werden gleichzeitig gedreht.

Der Spieler erhält 3€ ausgezahlt, wenn alle Glücksräder eine 1 zeigen und 4€, wenn alle Glücksräder eine 0 zeigen.

Wie groß ist der faire Einsatz für das Spiel?

## Lösungen

$$1. \quad \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{2}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot 3 = 1,03 \quad (\text{€})$$

$$2. \quad \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot 4 = 0,82 \quad (\text{€})$$

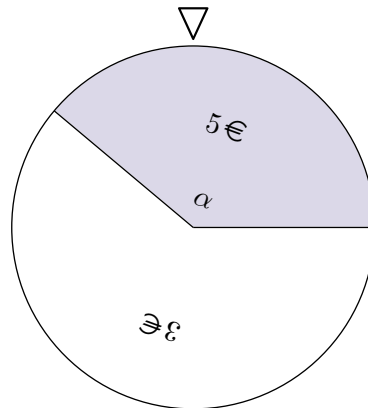
# Pfadwahrscheinlichkeiten

- In einer Urne sind 5 rote und 3 blaue Kugeln. Es wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
  - 3 rote Kugeln
  - genau 2 blaue Kugeln
  - mindestens 2 blaue Kugeln zu ziehen?
- In einer Urne sind 3 weiße Kugeln und 2 schwarze.
  - Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beide Male eine weiße Kugel zu ziehen?
  - Wie a), aber ohne Zurücklegen.
- Ein Würfel wird zweimal geworfen und das Produkt der beiden Augenzahlen notiert. Ist es günstiger auf das Produkt 15 oder auf das Produkt 12 zu wetten?
- Aus einem Skatspiel mit 32 Karten werden nacheinander 2 Karten gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei
  - 2 Asse
  - kein As
  - genau 1 As
  - mindestens ein As gezogen werden?
- Eine gezinkte Münze -  $P(\text{Zahl}) = 0,84$  - wird geworfen. Zeigt sie Zahl, wird aus einer Urne mit 4 schwarzen Kugeln und 1 weißen Kugel eine gezogen, sonst wird aus einer anderen Urne mit 2 schwarzen Kugeln und 1 weißen Kugel eine Kugel gezogen. Man gewinnt, wenn die gezogene Kugel weiß ist. Wie muss beim Einsatz von 5€ der Gewinn vereinbart werden, damit das Spiel fair ist?
- Ein Würfel wird geworfen. Tritt eine Primzahl auf, so wird anschließend noch eine Münze geworfen. Zeigt diese Münze Zahl, so hat man gewonnen, in allen anderen Fällen hat man verloren.
  - Berechne die Wahrscheinlichkeit das Spiel zu gewinnen.
  - Wie muss beim Einsatz von 2€ der Gewinn vereinbart werden, damit das Spiel fair ist?
- Lichterketten sind häufig in Reihe geschaltet, d.h. wenn ein Lämpchen ausfällt, geht die ganze Lichterkette aus. In einer derartigen Lichterkette mit 20 Lämpchen ist die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Lämpchen 95%, dass es die ganze Weihnachtszeit brennt.
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kette die ganze Weihnachtszeit funktioniert?
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lichterkette die Weihnachtszeit brennt, wenn man ein Reservelämpchen hat? Es kann vorausgesetzt werden, dass das Reservelämpchen nicht ausfällt.
- In einer Straßenbahn sind von 20 Fahrgästen 4 Schwarzfahrer. Der Schaffner kontrolliert 4 Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
  - alle 4 Schwarzfahrer
  - mindestens einen Schwarzfahrer erwischt?
- Ein Student darf bei einer Prüfung 3 von 40 Prüfungsfragen ziehen. Er hat 30 Fragen gelernt.
  - die 3 Fragen
  - mindestens eine Frage beantworten kann?

## Pfadwahrscheinlichkeiten Ergebnisse

1. In einer Urne sind 5 rote und 3 blaue Kugeln. Es wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
  - a) 3 rote Kugeln 17,9 %
  - b) genau 2 blaue Kugeln 26,8 %
  - c) mindestens 2 blaue Kugeln zu ziehen? 28,6 %
2. In einer Urne sind 3 weiße Kugeln und 2 schwarze.
  - a) Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beide Male eine weiße Kugel zu ziehen? 36 %
  - b) Wie a), aber ohne Zurücklegen. 30 %
3. Ein Würfel wird zweimal geworfen und das Produkt der beiden Augenzahlen notiert. Ist es günstiger auf das Produkt 15 oder auf das Produkt 12 zu wetten? 2:4
4. Aus einem Skatspiel mit 32 Karten werden nacheinander 2 Karten gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei
  - a) 2 Asse 1,2 %
  - b) kein As 76,2 %
  - c) genau 1 As 22,6 %
  - d) mindestens ein As gezogen werden? 23,8 %
5. Eine gezinkte Münze -  $P(\text{Zahl}) = 0,84$  - wird geworfen. Zeigt sie Zahl, wird aus einer Urne mit 4 schwarzen Kugeln und 1 weißen Kugel eine gezogen, sonst wird aus einer anderen Urne mit 2 schwarzen Kugeln und 1 weißen Kugel eine Kugel gezogen. Man gewinnt, wenn die gezogene Kugel weiß ist. Wie muss beim Einsatz von 5€ der Gewinn vereinbart werden, damit das Spiel fair ist? 22,59€
6. Ein Würfel wird geworfen. Tritt eine Primzahl auf, so wird anschließend noch eine Münze geworfen. Zeigt diese Münze Zahl, so hat man gewonnen, in allen anderen Fällen hat man verloren.
  - a) Berechne die Wahrscheinlichkeit das Spiel zu gewinnen. 25 %
  - b) Wie muss beim Einsatz von 2€ der Gewinn vereinbart werden, damit das Spiel fair ist? 8€
7. Lichterketten sind häufig in Reihe geschaltet, d.h. wenn ein Lämpchen ausfällt, geht die ganze Lichterkette aus. In einer derartigen Lichterkette mit 20 Lämpchen ist die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Lämpchen 95%, dass es die ganze Weihnachtszeit brennt.
  - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kette die ganze Weihnachtszeit funktioniert? 35,8 %
  - b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lichterkette die Weihnachtszeit brennt, wenn man ein Reservelämpchen hat? Es kann vorausgesetzt werden, dass das Reservelämpchen nicht ausfällt. 73,6 %
8. In einer Straßenbahn sind von 20 Fahrgästen 4 Schwarzfahrer. Der Schaffner kontrolliert 4 Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
  - a) alle 4 Schwarzfahrer 0,02 %
  - b) mindestens einen Schwarzfahrer erwischt? 62,4 %
9. Ein Student darf bei einer Prüfung 3 von 40 Prüfungsfragen ziehen. Er hat 30 Fragen gelernt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
  - a) die 3 Fragen 41,1 %
  - b) mindestens eine Frage beantworten kann? 98,8 %

# Erwartungswert



Wie groß ist der Winkel  $\alpha$  zu wählen,  
damit der Erwartungswert  $4,50\text{€}$  beträgt?

$$\alpha = 270^\circ$$