Teilbarkeit durch 3, durch 9, ggT

1. Welche Zahlen sind durch 3 teilbar?

Lösung: Alle Zahlen, die mit 3er-Schritten erreichbar sind, d. h. alle Vielfachen von 3,
nämlich: 3, 6, 9, 12, 15, ...

2. Welche Zahlen sind durch 4 teilbar?

3. Ist 7063 durch 7 teilbar?

Lösung: $7063 = 7000 + 63$
Mit 1000 und anschließend 9 7er-Schritten ist die Zahl erreichbar.

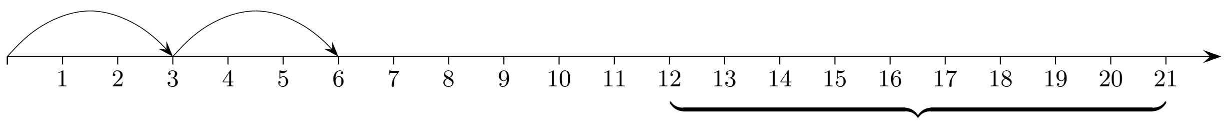
4. Ist 582 durch 3 teilbar?

Lösung: Um dies zu erkennen, gibt es eine einfache Regel. Hierzu zerlegen wir 582 geschickt:
$582 = 100 \cdot 5 + 10 \cdot 8 + 2$
$582 = 99 \cdot 5 + 1 \cdot \underline{5} + 9 \cdot 8 + 1 \cdot \underline{8} + \underline{2}$
Da 99 und 9 durch 3 teilbar sind, muss lediglich untersucht werden,
ob dies auch für $\underbrace{5 + 8 + 2}_{\text{Dies ist die Quersumme von 582.}}$ *zutrifft.*

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Die Zerlegung liefert auch eine Begründung für:
Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

5. Wie lauten alle gemeinsamen Teiler von 12 und 21?



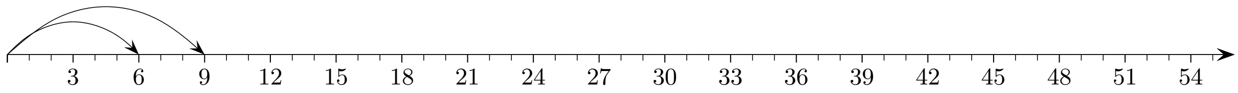
Wenn 12 mit einer bestimmten Schrittweite erreichbar ist und auch 21 mit dieser Schrittweite, dann trifft dies auch für die Differenz $21 - 12 = 9$ zu (beachte die Schritte von 12 bis 21). Statt die Teiler von 12 und 21 zu suchen, können daher auch die Teiler von 12 und 9 ermittelt werden. Offensichtlich gibt es nur den gemeinsamen Teiler 3. Die Bildung der Differenz kann wiederholt werden. Mit diesem Verfahren kann auch der größte gemeinsame Teiler (ggT) gefunden werden.

6. Ermittle den größten gemeinsamen Teiler von

a) 24 und 40 b) 38 und 24 c) 42 und 70

kgV

1. Zwei beliebige Zahlen, z. B. 6 und 9, sind als Teiler im Produkt ($6 \cdot 9 = 54$) enthalten.



54 ist ein gemeinsames Vielfache von 6 und 9.
Wie findet man nun aber die kleinste Zahl, die zwei gegebene Zahlen als Teiler hat?
Oder anders gefragt: Wie findet man das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier Zahlen?

Die beiden Folgen der Vielfachen können natürlich soweit aufgeschrieben werden, bis ein gemeinsames Vielfache gefunden wird, aber geht es nicht auch einfacher?

In diesem Beispiel ergeben 9 6er-Schritte 54, auch 6 9er-Schritte:

$$\begin{array}{lcccc} \text{6er} & \cdot & 9 & = & 54 \\ \text{9er} & \cdot & 6 & = & 54 \end{array}$$

Von beiden Schrittanzahlen kann der dritte Teil genommen werden, wir erhalten:

$$\begin{array}{lcccc} \text{6er} & \cdot & 3 & = & 18 \\ \text{9er} & \cdot & 2 & = & 18 \end{array}$$

Die gesuchte Zahl ist daher 18. (Das haben wir uns fast gedacht.)

2. Probieren wir das Verfahren an einem weiteren Beispiel aus.
Gesucht ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 30 und 42.

$$\begin{array}{lcccc} \text{30er} & \cdot & 42 & = & 1260 \\ \text{42er} & \cdot & 30 & = & 1260 \end{array}$$

Die beiden Schrittanzahlen können halbiert werden, wir erhalten:

$$\begin{array}{lcccc} \text{30er} & \cdot & 21 & = & 630 \\ \text{42er} & \cdot & 15 & = & 630 \end{array}$$

Von beiden Schrittanzahlen kann noch der dritte Teil genommen werden:

$$\begin{array}{lcccc} \text{30er} & \cdot & 7 & = & 210 \\ \text{42er} & \cdot & 5 & = & 210 \end{array}$$

Weiter kann nicht verkleinert werden. 210 ist daher das kleinste gemeinsame Vielfache.

*Ein ziemlich kleines gemeinsames Vielfache erhältst du,
indem du das Produkt der Zahlen durch gemeinsame Teiler der Zahlen dividierst.*

*Das kleinste gemeinsame Vielfache erhältst du,
indem du das Produkt durch den größten gemeinsamen Teiler dividierst (1260 : 6 = 210).*

3. Ermittle das kleinste gemeinsame Vielfache

a) 24 und 40 b) 16 und 60 c) 35 und 50

6. Ermittle den größten gemeinsamen Teiler von

   a) 24 und 40 b) 38 und 24 c) 42 und 70

   Lösung: a) 8 b) 2 c) 14

3. Ermittle das kleinste gemeinsame Vielfache

   a) 24 und 40 b) 16 und 60 c) 35 und 50

   Lösung: a) 120 b) 240 c) 350

Primzahlen

Was fällt dir hier auf?

1	○
2	○ ○
3	○ ○ ○
4	○ ○ ○ ○
5	○ ○ ○ ○ ○
6	○ ○ ○ ○ ○ ○
7	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
8	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
9	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
10	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
11	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
12	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
13	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
14	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
15	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

Primzahlen (lat. numerus primus 'erste Zahl', Zahl, die nicht zerlegbar ist) sind natürliche Zahlen größer 1, die keine echten Teiler haben, also nur durch 1 oder sich selbst teilbar sind.

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Jede Zahl größer 1 kann als Produkt von Primzahlen dargestellt werden.
Bis auf die Reihenfolge ist die Zerlegung eindeutig.

$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3, \quad 111 = 3 \cdot 37$