Primzahlen

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

42 ist eine zusammengesetzte Zahl. 2, 3 und 7 können nicht weiter zerlegt werden, es sind Primzahlen.

$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$

Es ist üblich, die Primfaktoren in aufsteigender Reihenfolge zu ordnen.

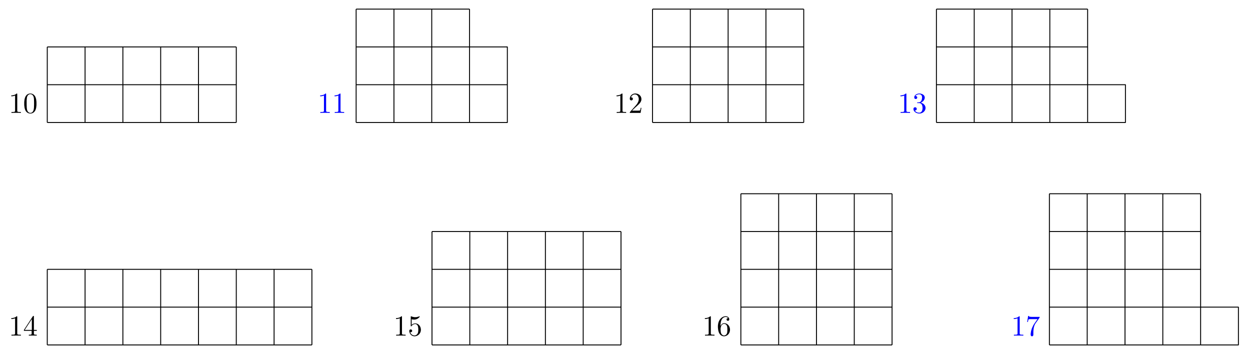
Die Zerlegung ist nur auf diese eine Weise möglich, wie sich nachweisen lässt.

$3 = 3 \cdot 1$, die 1 zerlegt die 3 nicht und gehört daher nicht zu den Primzahlen.

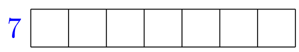
Bei einer (echten) Zerlegung, z. B. $36 = 4 \cdot 9$, ist kein Faktor gleich 1.
Primzahlen lassen sich nicht zerlegen.
Alle Zahlen ≥ 2 sind entweder zerlegbar oder Primzahlen.

Zwischen 2 und 200 sind 46 Primzahlen zu finden:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101,
103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199



Für eine Primzahl, z. B. $7 = 7 \cdot 1$, gibt es nur eine Darstellung als Produkt.
Nur die Zahl selbst und 1 sind Teiler. Eine Primzahl hat keine echten Teiler.



1. Euklid hat im 4. Jh. v. Chr. gezeigt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

2. 2018 wurde die bisher größte Primzahl $2^{82\,589\,933} - 1$ mit 24 862 048 Ziffern entdeckt.

3. Bisher unbewiesen ist die Goldbachsche Vermutung[1], dass jede gerade Zahl ≥ 4 die Summe zweier (nicht notwendig verschiedener) Primzahlen ist.

4. Suche mehrere Zahlenbeispiele zu dieser Vermutung.

[1] Goldbach bat Euler 1742, seine Vermutung zu beweisen. Trotz jahrelanger Bemühung gelang das nicht.

5. Weitere unbewiesene Vermutungen

   a) Jede natürliche Zahl ≥ 18 ist die Summe von drei verschiedenen Primzahlen.

   b) Jede ungerade natürliche Zahl ≥ 7 ist die Summe einer Primzahl und dem Zweifachen einer Primzahl.

   c) Für jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 3$ gibt es zwei natürliche Zahlen x und y, so dass gilt:
      $x + y = n$
      $x^2 + y^2$ ist eine Primzahl.

6. Suche mehrere Zahlenbeispiele zu diesen Vermutungen.

7. Fermat stellte 1637 folgende Rechnung an:

$$
\begin{aligned}
2 + 1 &= 3 \\
2 + 3 &= 5 \\
2 + 3 \cdot 5 &= 17 \\
2 + 3 \cdot 5 \cdot 17 &= 257 \\
2 + 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 &= 65\,537 \\
2 + 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65\,537 &= 4\,294\,967\,297
\end{aligned}
$$

   Er war sich ziemlich sicher, dass $4\,294\,967\,297$ eine Primzahl ist.
   Hundert Jahre später jedoch fand Euler die Zerlegung. Primzahlen sind blau gekennzeichnet.

$$
\begin{aligned}
&4\,294\,967\,297 \\
= \; &641 \cdot 6\,700\,417
\end{aligned}
$$