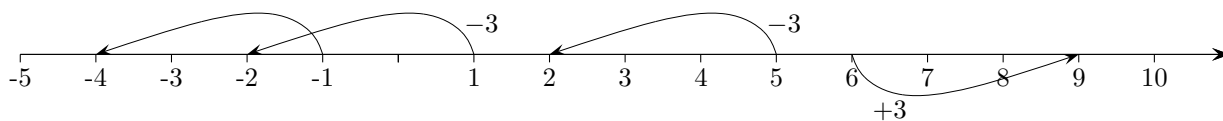


Rechnen mit negativen Zahlen Regeln entdecken



1. Klammern auflösen

$$20 - \underbrace{(8 + 5)}_{13} = 20 - 8 - 5 \quad \text{Statt 13 in einem zu subtrahieren, können auch nacheinander 8 und 5 subtrahiert werden.}$$

$$10 - \underbrace{(7 - 3)}_4 = 10 - 7 + 3 \quad \text{Wenn statt 4 zunächst 7 subtrahiert wird, so ist der Fehler zu korrigieren - durch Addition von 3.}$$

$$3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \quad 3 \cdot (4 + 2) = (4 + 2) + (4 + 2) + (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$$

2. Addition

$$\begin{aligned} (-10) + 25 &= 15 && \text{Einer positiven Zahl entspricht einem Guthaben, einer negativen Zahl entspricht einem Betrag, den man schuldet.} \\ (-15) + (-17) &= -32 && \text{Oder: } +3 \text{ bedeutet 3 Schritte auf der Zahlengeraden nach rechts, } -3 \text{ bedeutet 3 Schritte nach links.} \\ 18 + (-25) &= -7 \end{aligned}$$

3. Subtraktion

$$\begin{aligned} 5 - 8 &= 5 + (-8) = -3 && \text{Eine Subtraktion kann stets als Addition mit einer negativen Zahl geschrieben werden. } 10 - 6 = 10 + (-6) \\ -2 - 6 &= -8 && -2 - 6 = (-2) - 6 = (-2) + (-6) = -8 \\ 7 - (-4) &= 11 && 11 + (-4) = 7 \quad | -(-4) \quad \text{Beide Seiten minus } -4. \\ &&& 11 = 7 - (-4) \end{aligned}$$

4. Multiplikation

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-5) &= -15 && 3 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15 \\ (-3) \cdot (-4) &= 12 && \begin{aligned} 3 + (-3) &= 0 && | \cdot (-4) \quad \text{Beide Seiten mal } -4. \\ -12 + \underbrace{(-3) \cdot (-4)}_? &= 0 && \text{Beachte: } 0 \cdot (-4) = 0 \\ &&& (-3) \cdot (-4) \text{ muss 12 sein. Warum?} \end{aligned} \end{aligned}$$

5. Division

$$\begin{aligned} 8 : 2 &= 4 && \text{Probe } 4 \cdot 2 = 8 \\ (-8) : 2 &= -4 && \text{weil } (-4) \cdot 2 = (-8) \\ (-8) : (-2) &= 4 && \text{weil } 4 \cdot (-2) = (-8) \end{aligned}$$

6. Zahlenreihen

3 + 2 = 5	5 - 2 = 3	(-3) · 2 = -6
3 + 1 = 4	5 - 1 = 4	(-3) · 1 = -3
3 + 0 = 3	5 - 0 = 5	(-3) · 0 = 0
3 + (-1) = 2	5 - (-1) = 6	(-3) · (-1) = 3
3 + (-2) = 1	5 - (-2) = 7	(-3) · (-2) = 6
3 + (-3) = 0	5 - (-3) = 8	(-3) · (-3) = 9
3 + (-4) = -1	5 - (-4) = 9	(-3) · (-4) = 12

Das Rechnen mit negativen Zahlen, Ergänzung

Um im Guthaben/Schulden-Modell $7 - (-4)$ auszurechnen, können wir uns vorstellen, dass sich das Gesamtguthaben von 7 Einheiten aus 11 Einheiten Guthaben und (-4) Einheiten Schulden zusammensetzt, das dann um (-4) Einheiten Schulden vermindert wird.

$$7 - (-4) = \underbrace{11 + (-4)}_7 - (-4) = 11$$

$$\begin{array}{l} 4 - 4 = 0 \quad | +11 \quad \text{beide Seiten plus 11} \\ 15 - 4 = 11 \end{array}$$

Wenn auf beiden Seiten dasselbe addiert wird, bleibt die Gleichheit bestehen. Nach dieser Regel muss dann auch gelten:

$$\begin{array}{l} (-4) - (-4) = 0 \quad | +11 \quad \text{beide Seiten plus 11} \\ 7 - (-4) = 11 \quad \text{beachte: } (-4) + 11 = 7 \end{array}$$

Bedeutung

- a) $+4$ 4 wird addiert
- b) -4 4 wird subtrahiert
- c) $+(-4)$ -4 wird addiert, 4 wird subtrahiert
- d) $-(-4)$ -4 wird subtrahiert, 4 wird addiert
- $0 - (-4)$ kann vereinfacht werden zu $-(-4)$

Mögliche Schreibweisen:

$$2 - (-5) = 2 + (-(-5)) = 2 + 5 = 7$$

$$-(-3) + 8 = 8 - (-3) = 11$$

Im Gleichgewicht

a) $\square + 10 = 25 \quad | -10$
 $\square = 15$

beide Seiten minus 10

b) $\square - 20 = 5 \quad | +20$
 $\square = 25$

beide Seiten plus 20

c) $40 - \square = 22 \quad | -40$
 $-\square = -18$
 $\square = 18$

beide Seiten minus 40, beachte: $40 + (-\square) = 22$

d) $30 - \square = 44 \quad | +\square$
 $30 = 44 + \square$
 $\square = -14$

beide Seiten plus \square

Im Gleichgewicht Fortsetzung

a) $2 + 3 = 5 \quad | \cdot 4$ beide Seiten mit 4 multiplizieren
 $8 + 12 = 20$

b) $2 + 3 = 5 \quad | \cdot (-3)$ beide Seiten mit -3 multiplizieren
 $(-6) + (-9) = -15$

c) $3 + (-3) = 0 \quad | \cdot (-2)$ beide Seiten mit -2 multiplizieren
 $(-6) + \underbrace{(-3) \cdot (-2)}_6 = 0$
Eine andere Möglichkeit gibt es nicht.

d) $4 + 6 = 10 \quad | : 2$ beide Seiten durch 2 dividieren
 $2 + 3 = 5$

e) $4 + 6 = 10 \quad | : (-2)$ beide Seiten durch -2 dividieren
 $(-2) + (-3) = (-5)$

f) $4 + (-4) = 0 \quad | : (-2)$ beide Seiten durch -2 dividieren
 $(-2) + \underbrace{(-4) : (-2)}_2 = 0$

g) $(-2) \cdot \underbrace{(8 + (-5))}_3 = -16 + (-2)(-5)$
 $\underbrace{-6}_{-6} \quad | +16$
 $10 = (-2)(-5)$

Ergänzung

$$\begin{aligned}(-a) - (-a) &= 0 & | & +a \\ \underbrace{a + (-a)}_0 - (-a) &= a \\ 0 - (-a) &= a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1) \cdot 4 &= 4 \cdot (-1) \\ &= (-1) + (-1) + (-1) + (-1) \\ &= -4\end{aligned}$$

allgemein

$$\begin{aligned}((-1) + 1) \cdot b &= 0 \\ (-1) \cdot b + 1 \cdot b &= 0 \\ (-1) \cdot b &= -b & | & b = -a \\ (-1) \cdot (-a) &= -(-a) \\ &= a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1) \cdot (-a) &= a & | & \cdot c \\ c \cdot (-1) \cdot (-a) &= c \cdot a \\ (-c) \cdot (-a) &= c \cdot a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3 + (-3) &= 0 & | & \cdot (-4) \\ -12 + (-3) \cdot (-4) &= 0 & | & +12 \\ (-3) \cdot (-4) &= 12\end{aligned}$$

Gegenzahl

Wird in $-c = c - 2c$ für $c = -a$ eingesetzt, entsteht $-(-a) = -a - 2 \cdot (-a)$.

Wie ist der Term $-(-a)$ zu verstehen?

Neben Rechen- und Vorzeichen wie in $5 - 2 = 5 + (-2)$ wird durch $- \dots$ jedem Element die Gegenzahl (das additiv Inverse) zugeordnet.

Die Gegenzahl von 3 ist -3 , Zahl + Gegenzahl = 0.

Die Gegenzahl von -3 ist $-(-3)$.

$-(-3) = 3$, weil $(-3) + 3 = 0$ ist.

Die Zuordnung $a \mapsto -a$ (Punktspiegelung am Ursprung) stimmt wegen

$(-1) \cdot a = -a$ mit der Multiplikation mit -1 überein und wird meistens auch so gelesen.

In $-(-4) = 0 - (-4)$ steht nur auf der rechten Seite ein Rechenzeichen.

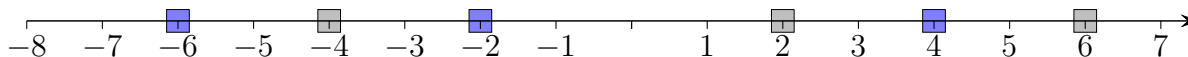
Auf die drei unterschiedlichen Bedeutungen des Minuszeichens wird man anfänglich noch hinweisen, später verblassen sie.

$$(-1) \cdot a = -a \quad \text{siehe vorige Seite}$$

$$\begin{aligned} (-4) \cdot (-5) &= (-1) \cdot 4 \cdot (-1) \cdot 5 \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot 20 \\ &= (-1) \cdot (-20) = -(-20) = 20 \end{aligned}$$

Minus mal Minus entspricht Gegenzahl von der Gegenzahl

Mit $\cdot(-5)$ wird die Seite gewechselt, mit $\cdot(-4)$ abermals,
mit $\cdot(-4) \cdot (-5)$ ist man wieder auf der Ausgangsseite.



$$\begin{aligned} 6 + (-4) &= 2 & | \cdot (-1) \\ -6 + 4 &= -2 \end{aligned}$$

Die Zahlen 6, -4 , 2 ergeben bei der Punktspiegelung $-6, 4, -2$ mit $-6 + 4 = -2$ und diese Zahlen gehen bei einer weiteren Punktspiegelung wieder in die Ausgangszahlen über. Mit dieser Anschauung (und weiteren Beispielen) kann eine Vertrautheit beim Rechnen mit negativen Zahlen erreicht werden.

Anmerkungen zur Didaktik

Seit Diophant mussten mehr als 1500 Jahre vergehen, bis sich die Rätselhaftigkeit der “Minus-mal-minus-Regel“ in der Theorie der Zahlbereichserweiterungen auflöste.

Die bei diesem Thema immer wieder neu zu überwindenden geistigen Hürden sollten den Unterrichtenden bewusst sein. Der bloße Hinweis auf das Permanenzprinzip ist kein logisches Argument. Ebensovienig überzeugend ist die Feststellung der Wahlfreiheit und die in der Schule nicht beweisbare Behauptung, dass stets etwas Richtiges herauskommt.

Wir befinden uns in einer ähnlichen Situation, wenn wir von einer Drohne die Flugeigenschaften mit einigen Testflügen herausfinden wollen.

Die vorigen sechs Seiten beinhalten eine Didaktik des Rechnens mit negativen Zahlen.

Das Guthaben/Schulden-Modell führt zu den Additionsregeln. Die Distributivität, hier in der Form der Äquivalenzumformungen für (einfache) Gleichungen, erzwingt die Rechenregeln der Multiplikation. Minus mal Minus ist Gegenzahl von der Gegenzahl, also Plus.

Die Bedeutung der Veranschaulichung durch Punktspiegelungen hatte ich schon erwähnt.

Vermutlich begünstigen die folgenden Formulierungen, dass Lernende frühzeitig aus der Mathematik aussteigen und das Bild von Mathematik nachhaltig gestört wird.

Also bitte nicht so:

Eine positive und eine negative Zahl werden addiert, indem man den kleineren der beiden Beträge vom größeren subtrahiert. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag.

Die Subtraktion zweier rationaler Zahlen lässt sich stets auf eine Addition zurückführen, indem, statt den Subtrahend vom Minuend zu subtrahieren, zum Minuend die Gegenzahl des Subtrahenden addiert wird.

Bei der Verwendung des Fahrstuhlmodells ist zu beachten, dass z.B. -2 für das Tiefgeschoss steht, aber auch für die Abwärtsbewegung um 2 Stockwerke. Die gleiche begrifflich schwierige Situation haben wir bei Vektoren, die einen Punkt als Ortsvektor und eine Richtung festlegen. $3 + (-2)$ erlaubt zwei Interpretationen (Stockwerk/Abwärtsbewegung, Aufwärts-/Abwärtsbewegung), $(-2) + 3$ zwei weitere. Daher ist dieses Modell (wie auch aus dem gleichen Grund das Temperaturmodell) zur Einführung von Rechenregeln ungeeignet.

Um negative Zahlen als eigenständige Objekte erscheinen zu lassen, sind Spiele möglich, in denen die Spielstände mit z.B. 3 Minusplättchen $\ominus\ominus\ominus$ oder mit 3 Plusplättchen $\oplus\oplus\oplus$ bewertet werden. Die Summe ist Null.

Die Plättchen $\ominus 3$ $\oplus 3$ (z.B.) können zur Abkürzung eingeführt werden.

$\ominus 2$ $\oplus 3 = \oplus 1$ erscheint sinnvoll.

Es können Regeln festgelegt werden, so dass sich je nach Spielstand (Würfelergebnis) die Plättchen eines Spielers verdoppeln ($\cdot 2$) oder in ihrer Wertigkeit umkehren ($\cdot (-1)$).

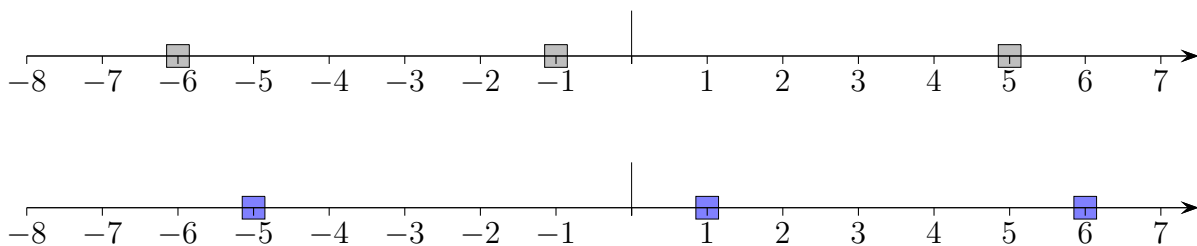
Aus $\ominus 2$ $\oplus 3 = \oplus 1$ wird $\oplus 2$ $\ominus 3 = \ominus 1$.

Liegt schon eine Sicherheit in der Handhabung der Rechenregeln vor, kann die zweite Interpretation der Addition betrachtet werden, dass bei zwei Summanden der eine die Veränderung des anderen angibt, z.B. $1003 + (-3) = 1003 - 3 = 1000$. Nebenbei: Dieser Sachverhalt überträgt sich auf Vektoren (und der Darstellung negativer Zahlen mit Pfeilen). Ein Vektor kann als Ortsvektor die Koordinaten eines Punkts festlegen oder bei der Addition die Koordinatenänderungen beinhalten.

Anmerkungen zur Didaktik

Letztendlich sollte das Rechnen mit negativen Zahlen - möglicherweise bei wiederholter Thematisierung auf einer höheren Klassenstufe - mit der Nützlichkeit beim Umformen von Gleichungen assoziiert werden. Auch durch das Multiplizieren mit einer negativen Zahl bleibt die Lösung erhalten (eine Gleichung geht in eine äquivalente Gleichung über). Dieser Sachverhalt wird anschaulich und einprägsam mit der Spiegelung verknüpft.

$$\begin{aligned}5 - x &= -1 \\5 + (-x) &= -1 \quad | \cdot (-1) \\-5 + x &= 1 \quad | + 5 \\x &= 6\end{aligned}$$



Bevor im 16. Jh. die Ausdrücke $-n$ für natürliche Zahlen n aufgrund der Vorteile beim Gleichungslösen als Zahlen anerkannt wurden, begnügte man sich mit Termen wie $3 - 8$, $0 - 2$, usw. Bei der Einführung der negativen Zahlen sollte man sich gewahr sein, dass ihre Akzeptanz historisch ein mühsamer Prozess war.