

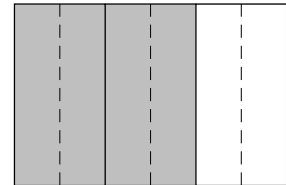
# Bruchrechnung Begründungen

Von 12 Mäusen haben  $\frac{2}{3}$  der Mäuse Angst vor Katzen. Wie viele Mäuse sind das?

Lösung: 8 Mäuse Begründung?

Erweitern und Kürzen Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren, bzw. dividieren.

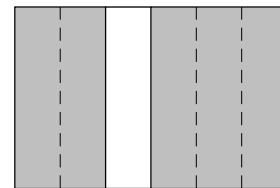
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$



$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Addition und Subtraktion Bei gleichnamigen Brüchen werden nur die Zähler addiert, bzw. subtrahiert.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$



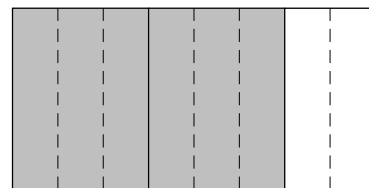
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Multiplikation Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner, für 3 wird  $\frac{3}{1}$  geschrieben.

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{2}{5} \cdot 3 \text{ bedeutet } \frac{2}{5} \text{ von } 3, \text{ also } \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \text{ bedeutet } \frac{1}{2} \text{ von } \frac{3}{4}, \text{ also } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

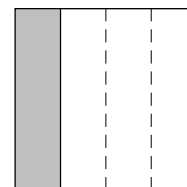


$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

# Bruchrechnung      Begründungen

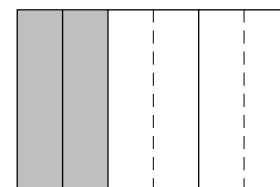
Division      Durch eine Zahl dividieren heißt, mit ihrem Kehrwert zu multiplizieren.      Kehrwert von 3 ist  $\frac{1}{3}$ .

$1 : \frac{1}{4}$  bedeutet, wie oft  $\frac{1}{4}$  in 1 enthalten ist,      also       $1 : \frac{1}{4} = 4$



$$1 : \frac{1}{4} = 4$$

$\frac{4}{5} : 2$  bedeutet, dass  $\frac{4}{5}$  halbiert wird,      also       $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$



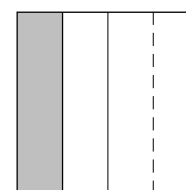
$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$$

$\frac{1}{3} : 2$  bedeutet wieder, dass  $\frac{1}{3}$  halbiert wird,      also       $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$  bedeutet, wie oft  $\frac{1}{4}$  in  $\frac{1}{2}$  enthalten ist, also       $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$

$\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$  bedeutet, wie oft  $\frac{1}{2}$  in  $\frac{1}{4}$  enthalten ist, also       $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$  passt in  $\frac{1}{4}$  zur Hälfte, entsprechend       $3 : 6 = \frac{1}{2}$



$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

# Anmerkungen zur Didaktik

Der Bruch  $\frac{1}{2}$  ist die Hälfte von 1.

Der Bruch  $\frac{2}{3}$  ist ein Drittel von 2. Zu begründen wäre:  $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$  (z. B.) existiert - wie jede andere Zahl - nur in unserem Geist. Nur in Verbindung mit Einheiten werden Zahlen „sichtbar“. In unserer Umgebung finden wir  $\frac{1}{2} m$ ,  $\frac{1}{2}$  Quadrat, usw.

$\frac{1}{2}$  Quadrat ist die Hälfte von 1 Quadrat.

$\frac{1}{2}$  von  $3 (= 1 + 1 + 1)$  ist  $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3$

Merke: „von“ bedeutet „mal“

Verschiedene Sichtweisen:

Der Bruch  $\frac{3}{4}$  kann, wie jeder andere auch, auf mehrere Weisen betrachtet werden.

a)  $\frac{3}{4}$  wird als Anteil gelesen, der von z. B. 20 Schafen gebildet wird.

20 Schafe sind durch 4 zu teilen, also 5 Schafe, anschließend ist mit 3 zu multiplizieren,

Ergebnis: 15 Schafe.

$\frac{3}{4}$  sind 3 mal  $\frac{1}{4}$ .

$\frac{3}{4}$  von 20, d. h.  $\frac{3}{4} \cdot 20 = 3 \cdot 5 = 15$

Ein Anteil ist hier also auf etwas gerichtet, der Anteil von ...

Das Rechnen mit Anteilen ohne Bezug (Bruchrechnung) erscheint als nicht so naheliegend.

In der Prozentrechnung wird (einziger Unterschied) ausschließlich der Nenner 100 verwendet.

b)  $\frac{3}{4}$  von 1, d. h.  $\frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$ ,  $3 \cdot \frac{1}{4} = 3 : 4$  Dies kann ansprechend veranschaulicht werden.



$\frac{3}{4}$  wird als Divisionsterm  $3 : 4$  betrachtet, wobei auf die Division  $3 : 4 = 0,75$  verzichtet wird.

Das vermeidet Ungenauigkeiten wie  $\frac{1}{3} = 1 : 3 \approx 0,333333$ .

$\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3$

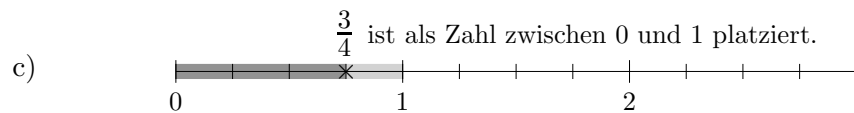
Der Vorteil der Bruchschreibweise wird erkennbar, wenn

$\frac{1}{3} = 1 : 3 \approx 0,333333$ .

multipliziert wird, z. B. mit 18.

Für die Begründung der Rechenregeln bei dieser Sichtweise siehe: [Bruchtermezusammenfassen](#)

In der Unterstufe können die Rechenregeln anhand von Beispielen erläutert werden.



In Rechnungen gehen die Sichtweisen nahtlos ineinander über:

$$\frac{2}{3} \text{ von } 18, \quad \text{d. h.} \quad \frac{2}{3} \cdot 18 = \frac{36}{3} = 12 \quad \text{Vorheriges Kürzen wäre sinnvoll gewesen.}$$

Um ein Agieren im Zahlbereich  $\mathbb{Q}$  zu ermöglichen, wird, wenn es das Abstraktionsvermögen erlaubt, auf die Nennung von Einheiten verzichtet. Dies sollte bewusst geschehen, damit nicht der Eindruck entsteht, dass die Schreibweise unvollständig ist. Einsichtige Begründungen und regelmäßige Wiederholungen führen zu einer Vertrautheit mit den vielfältigen Regeln der Bruchrechnung. Plantagenaufgaben, sowie große Zähler und Nenner schrecken eher ab. Den ggT und das kgV mit der Primfaktorzerlegung zu ermitteln, ist für die Bruchrechnung ohne Bedeutung.

Um einer GTR-bedingten Entfremdung während der Mittelstufe entgegenzuwirken, sollte in größeren Abständen an die Zweckmäßigkeit von Brüchen  $\frac{3}{7} = 3/7$ , wie in b) ausgeführt, hingewiesen werden. Mit zunehmender Sicherheit im Umformen werden die Begründungen der Rechenregeln (siehe [Bruchtermezusammenfassen](#)) immer ersichtlicher.

## Division durch einen Bruch

Unmittelbar einsichtig:

$$\frac{8}{2} = \frac{8 \cdot 10}{2 \cdot 10} = 4$$

$$8 : 2 = 80 : 20$$

$$5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

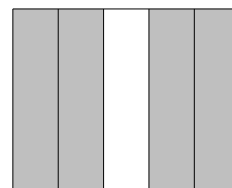
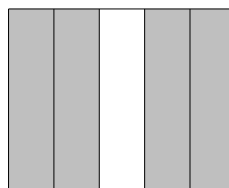
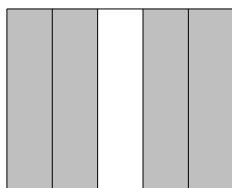
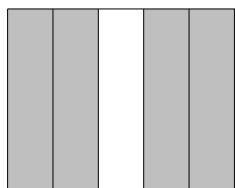
Wie verhält es sich mit:

$$\frac{4}{\frac{2}{5}} = ?$$

Wir vereinfachen, indem wir mit 5 erweitern

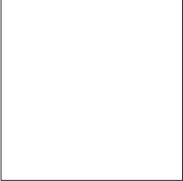
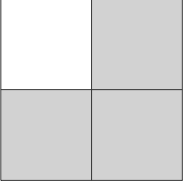
$$\frac{4}{\frac{2}{5}} = \frac{4 \cdot 5}{\frac{2 \cdot 5}{5}} = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

und erkennen, dass 4 mit  $\frac{5}{2}$  (dem Kehrwert) zu multiplizieren ist.  
Mit einem Blick:



# Sachaufgaben

1. Im Kindergarten sind 12 Kinder schon Vorschulkinder, die bei den Fest-Vorbereitungen helfen können,  $\frac{5}{6}$  davon sind Mädchen. Wie viele Jungen können bei den Vorbereitungen helfen?
2. Auf dem Fest werden 3 unterschiedliche Kuchen angeboten.  $\frac{2}{3}$  der Kinder entscheiden sich für den 1. Kuchen,  $\frac{1}{5}$  der Kinder für den 2. Kuchen. Wie viele der insgesamt 30 Kinder entscheiden sich für den 3. Kuchen?
3. Es muss geschmückt werden.  $\frac{2}{3}$  der Girlanden sind schon aufgehängt. Es fehlen noch 5 Girlanden. Wie viele Girlanden werden insgesamt aufgehängt?
4. Beim Frühlingsfest wurde ein Gewinn von 655 € erzielt. Davon sollen  $\frac{4}{5}$  für neue Bücher ausgegeben werden und für den Restbetrag Spiele gekauft werden. Wie viel Euro werden für Bücher ausgegeben, wie viel Euro für Spiele?

$\frac{3}{4}$  von  sind   $\frac{1}{4}$  von  $\square$  ist der 4. Teil von  $\square$ ,  $\frac{3}{4}$  von  $\square$  3mal soviel.

Es gibt viele verschiedene Lösungen.

$\frac{3}{5}$  von 25 sind 15 (25 durch 5 mal 3), von bedeutet mal,  $\frac{3}{5} \cdot 25 = \frac{3 \cdot 25}{5} = 15$

Kürzen ist immer sinnvoll.  $\frac{3 \cdot \cancel{25}^5}{\cancel{5}_1} = 15$

# Sachaufgaben

1. Im Kindergarten sind 12 Kinder schon Vorschulkinder, die bei den Fest-Vorbereitungen helfen können,  $\frac{5}{6}$  davon sind Mädchen. Wie viele Jungen können bei den Vorbereitungen helfen?

$\frac{1}{6}$  von 12 Vorschulkindern sind Jungen, also 2.

2. Lösungsweg

$\frac{5}{6}$  von 12 Vorschulkindern sind Mädchen, also 10.  $12 - 10 = 2$  (Jungen)

2. Auf dem Fest werden 3 unterschiedliche Kuchen angeboten.  $\frac{2}{3}$  der Kinder entscheiden sich für den 1. Kuchen,  $\frac{1}{5}$  der Kinder für den 2. Kuchen. Wie viele der insgesamt 30 Kinder entscheiden sich für den 3. Kuchen?

$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15}$ , für den 3. Kuchen entscheiden sich  $\frac{2}{15}$  von 30 Kindern, also 4.

2. Lösungsweg

$\frac{2}{3}$  von 30 Kindern entscheiden sich für den 1. Kuchen, also 20.

$\frac{1}{5}$  von 30 Kindern entscheiden sich für den 2. Kuchen, also 6.

$30 - 20 - 6 = 4$

4 Kinder entscheiden sich für den 3. Kuchen.

3. Es muss geschmückt werden.  $\frac{2}{3}$  der Girlanden sind schon aufgehängt. Es fehlen noch 5 Girlanden. Wie viele Girlanden werden insgesamt aufgehängt?

5 Girlanden sind  $\frac{1}{3}$  der Girlanden. Insgesamt ( $\frac{3}{3}$ ) wurden also 15 Girlanden aufgehängt.

4. Beim Frühlingsfest wurde ein Gewinn von 655 € erzielt. Davon sollen  $\frac{4}{5}$  für neue Bücher ausgegeben werden und für den Restbetrag Spiele gekauft werden. Wie viel Euro werden für Bücher ausgegeben, wie viel Euro für Spiele?

Restbetrag (Spiele)  $\frac{1}{5}$  von 655 € sind 131 €.

Für Bücher werden ausgegeben:  $655 \text{ €} - 131 \text{ €} = 524 \text{ €}$

2. Lösungsweg

Für neue Bücher sollen  $\frac{4}{5}$  von 655 €, also 524 €, ausgegeben werden.

Für Spiele verbleiben:  $655 \text{ €} - 524 \text{ €} = 131 \text{ €}$