# Argumentieren, Begründen und Beweisen

1. Unter 5 Kugeln (6, 7 Kugeln) befindet sich eine Leichtere.
   Wie kann sie mit möglichst wenigen Wägungen mit einer Balkenwaage heraus gefunden werden?

2. Der Schnittwinkel zweier Geraden sei $\alpha = 40°$.
   Wie groß sind die übrigen Winkel, die durch die Geraden festgelegt sind?

3. Beweise, dass die Summe aller Innenwinkel im Dreieck 180° beträgt.

4. Die Schenkel zweier Winkel stehen paarweise senkrecht aufeinander.
   Welche Beziehung besteht zwischen den Größen der Winkel?

5. Von einem Dreieck werden zwei Seiten verdoppelt. Ein neues Dreieck entsteht.
   Wie hat sich hierbei der Flächeninhalt verändert?

6. Von einem Würfel werden drei Kanten, die einen gemeinsamen Endpunkt haben, vervierfacht.
   Ein neuer Würfel entsteht. Wie hat sich das Volumen verändert?

7. Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei Kinder für ein Foto in eine Reihe zu stellen?

8. Wie viele Möglichkeiten gibt es für vier Kinder, an einem runden Tisch zu sitzen? Hierbei sollen nur die Sitzordnungen berücksichtigt werden, die sich in mindestens einem Nachbarn unterscheiden.

9. Unter vier Blutproben befindet sich genau eine, die mit Bakterien infiziert ist. Diese soll mit möglichst wenigen Tests herausgefunden werden. (Proben können auch gemischt werden.)

10. Beweise: Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

11. Beweise den Satz des Thales.

12. Der Mittelpunkt eines Kreises liegt auf einem Kreis mit demselben Radius. Ein Schnittpunkt der Kreise sei $S$. Welche Eigenschaft hat das Dreieck, das durch die beiden Mittelpunkte und $S$ festgelegt ist? Durch die Kreismittelpunkte wird eine Gerade gelegt, es entstehen neue Schnittpunkte mit den Kreisen. Wie viele neue Dreiecke entstehen mit $S$ und zwei Schnittpunkten als Eckpunkte? Was kann über die Flächeninhalte im Vergleich zum ersten Dreieck ausgesagt werden?

13. Die Summe zweier natürlicher Zahlen $m$ und $n$ sei $k$.
    Zeige, falls $k$ und $n$ durch 7 teilbar sind, dann ist es auch $m$.

14. Zeige, dass das Produkt zweier ungerader natürlicher Zahlen ungerade ist.

15. Die Polizei untersucht eine Einbruchsserie in Betrieben. Die Einbrüche sind mit oder ohne Einbruchsspuren, die Verdächtigten sind frühere Angestellte oder sie sind es nicht. Die Vermutung ist, dass die verdächtigten früheren Angestellten keine Einbruchsspuren hinterließen. Der Polizeicomputer zeigt auf der ersten Seite entweder nur den Einbruch mit/ohne Einbruchsspuren an oder ob ein Verdächtigter früherer Angestellter war oder nicht. Bei welchen Einträgen muss die zweite Seite mit den restlichen Informationen angesehen werden, um die Vermutung zu bestätigen?

# Argumentieren, Begründen und Beweisen

16. Welche Karten müssen umgedreht werden, um zu überprüfen, ob die Aussage:
"Wenn auf der einen Kartenseite ein Buchstabe steht, dann ist auf der Anderen eine Zahl." zutrifft?

| | | |
|---|---|---|
| G | 17 | |

17. Welche Karten müssen umgedreht werden, um zu überprüfen, ob die Aussage:
"Wenn auf der einen Kartenseite ein Zeichen ist, dann ist auf der Anderen eine Zahl oder ein Buchstabe." zutrifft?

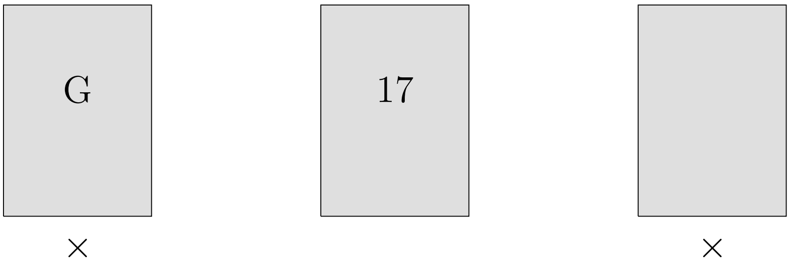
| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | R | | $\leftrightsquigarrow$ |

18. Jede dieser vier Karten enthält auf einer Seite (Vorder- oder Rückseite) ein Reiseziel und auf der anderen Seite ein Verkehrsmittel, das Frau M. für diese Reise stets benutzt.
Welche Karten müssen umgedreht werden, um zu überprüfen, ob die Aussage:
"Jedesmal, wenn Frau M. nach München fährt, reist sie per Bahn." zutrifft?

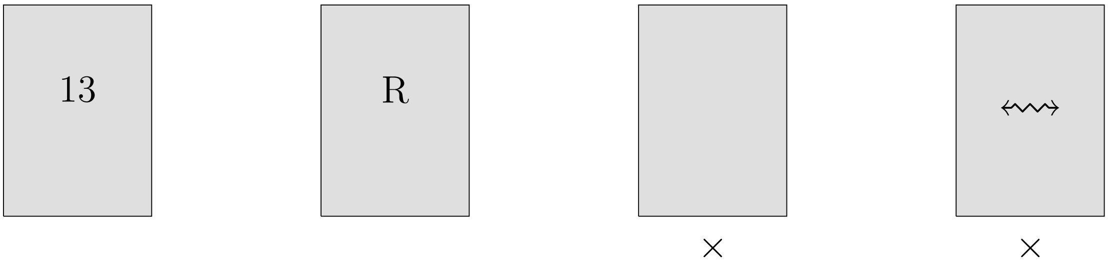
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Mün-chen* | *Stutt-gart* | *Bahn* | *Auto* |

# Argumentieren, Begründen und Beweisen

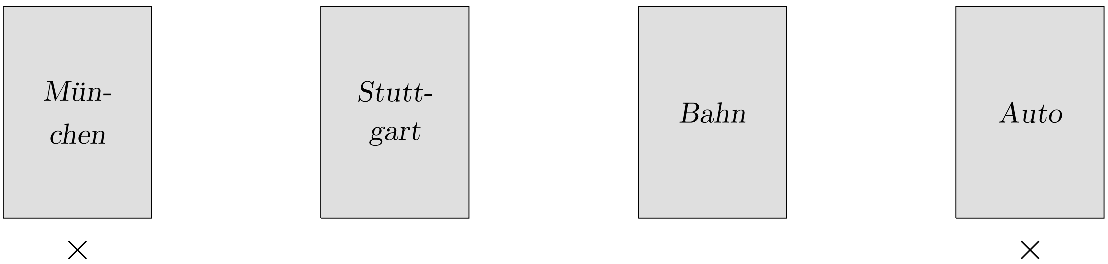
16. Welche Karten müssen umgedreht werden, um zu überprüfen, ob die Aussage:
“Wenn auf der einen Kartenseite ein Buchstabe steht, dann ist auf der Anderen eine Zahl.“ zutrifft?




17. Welche Karten müssen umgedreht werden, um zu überprüfen, ob die Aussage:
“Wenn auf der einen Kartenseite ein Zeichen ist, dann ist auf der Anderen eine Zahl oder ein Buchstabe.“ zutrifft?




18. Jede dieser vier Karten enthält auf einer Seite (Vorder- oder Rückseite) ein Reiseziel und auf der anderen Seite ein Verkehrsmittel, das Frau M. für diese Reise stets benutzt.
Welche Karten müssen umgedreht werden, um zu überprüfen, ob die Aussage:
“Jedesmal, wenn Frau M. nach München fährt, reist sie per Bahn.“ zutrifft?

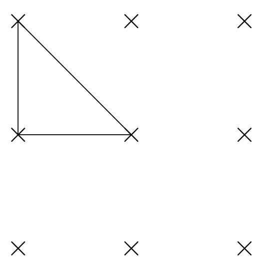


19. Ein Beispiel für unzulässiges Verallgemeinern:
31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331 und 33333331 sind alles Primzahlen.
Es gilt jedoch $333333331 = 17 \cdot 19607843$.

20. Beweise:
Für jede Primzahl $p$ gilt: Der Vorgänger $(p-1)$ oder der Nachfolger $(p+1)$ ist durch 6 teilbar.
Primzahlen bis 100:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

21. Beweise:
Multipliziert man, beginnend mit 2, eine beliebige Anzahl von aufeinander folgenden Primzahlen und addiert 1, so erhält man eine Zahl, die entweder Primzahl ist oder durch keine der verwendeten Primzahlen teilbar ist.
Was folgt daraus?

22. Wie viele verschiedene Dreiecke (d. h. unterschiedlich in mindestens einer Seitenlänge) können mit den gezeichneten Punkten gebildet werden?



23. Es war ein Problem, das Baby in der Klinik zu wiegen. Es hielt nicht still und brachte die Waage zum Zittern. So hielt ich das Baby und stand auf der Waage, während die Schwester 78 $kg$ ablas. Dann hielt die Schwester das Baby und ich las 69 $kg$ ab. Schließlich hielt ich die Schwester; die Waage zeigte 137 $kg$ an. Wie schwer war das Baby?

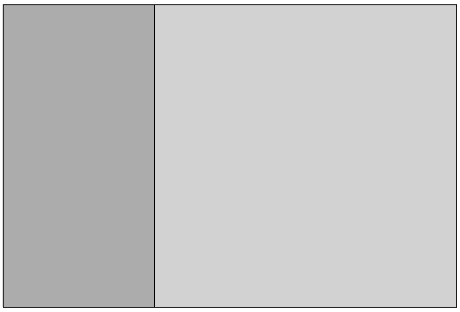
24. Wie kann man 6 Liter Wasser von einem Fluss abfüllen, wenn zum Messen nur ein 4-Liter-Eimer und ein 9-Liter-Eimer zur Verfügung stehen?

25. Eine Bauersfrau soll aus einem Bottich voll Essig genau einen Liter abmessen, hat dazu jedoch nur ein 3-l- und ein 5-l-Gefäß. Wie erreicht sie dies am besten?

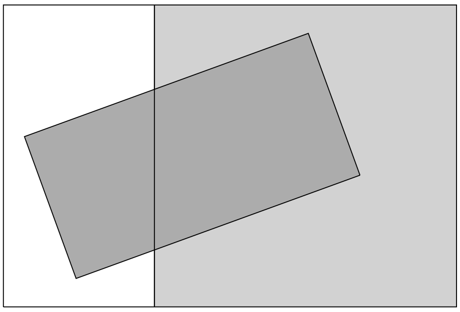
26. Eine Kanne mit 8 Liter Fassungsvermögen ist vollgefüllt mit Wein. Wie kann man 4 Liter Wein abfüllen, wenn zwei leere Kannen mit 5 Liter und 3 Liter Fassungsvermögen zur Verfügung stehen?

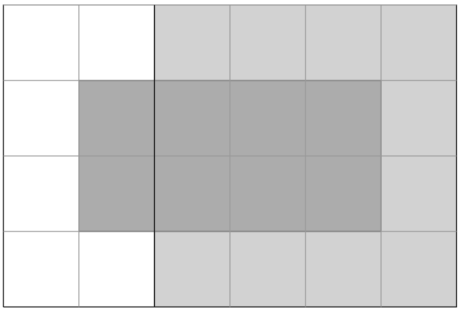
27. In einem Fass befinden sich 18 Liter Wein. Diese Menge soll mit Hilfe eines 2-l-Bechers, eines 5-l-Kruges und eines 8-l-Eimers so verteilt werden, dass sich die Hälfte des Weines in dem Fass, ein Drittel des Weines in dem Eimer und ein Sechstel des Weines in dem Krug befindet. Welche Umfüllungen sind dazu notwendig?

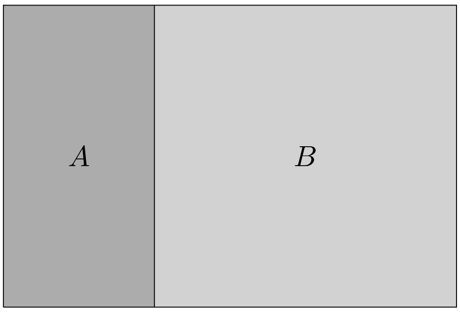
# Teppichproblem

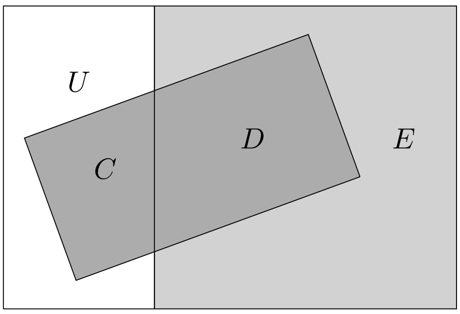


Ein Zimmer wird mit zwei Teppichen ausgelegt.
Beweise:
Wird der eine Teppich (beliebig) verschoben, so ist die unbedeckte Fläche genau so groß wie die doppelt ausgelegte Fläche.








Behauptung $\quad U = D$

Beweis

Die Behauptung kann direkt eingesehen werden.
Falls es an Vorstellungskraft mangelt:

$$U + \underbrace{C + D}_{A} + E = A + B$$

$$U + E = B$$

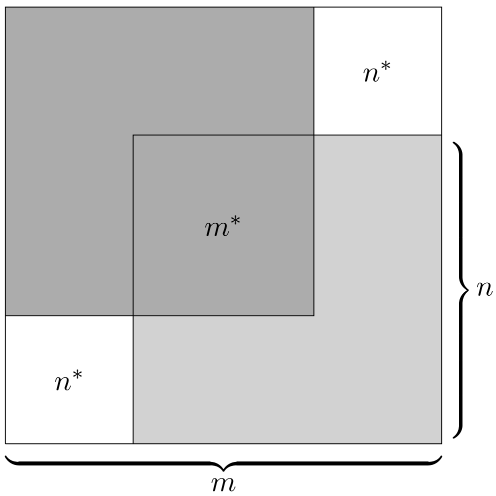
$$U = B - E = D$$

# $\sqrt{2}$ ist irrational

Die ansehnliche Näherung $\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$ mit $\left(\frac{577}{408}\right)^2 = 2{,}000006007$
könnte die Vermutung entstehen lassen, dass es natürliche Zahlen $m$ und $n$ gibt,
so dass exakt $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ist.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \iff m^2 = 2n^2$$

Ein Blick auf die Grafik genügt, um zu erkennen, dass das nicht möglich ist.

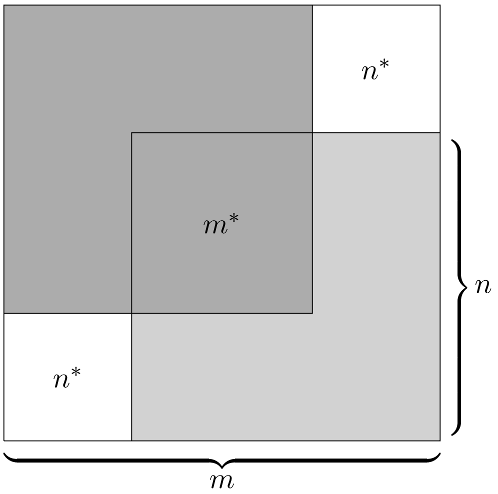


# $\sqrt{2}$ ist irrational

Durch die ansehnliche Näherung $\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$ mit $\left(\frac{577}{408}\right)^2 = 2{,}000006007$
könnte vermutet werden, dass es natürliche Zahlen $m$ und $n$ gibt,
so dass exakt $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ist.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \iff m^2 = 2n^2$$

Ein Blick auf die Grafik genügt, um zu erkennen, dass das nicht möglich ist.




Nach dem Teppichsatz gilt $m^{*2} = 2n^{*2}$.
Das wäre gleichbedeutend mit $\sqrt{2} = \frac{m^*}{n^*}$.
Nun ist $m^* < m$ und $n^* < n$.

Mit $m^*$ und $n^*$ könnte das Verfahren wiederholt werden, usw.
Welcher Widerspruch wird sichtbar?

Beachte, dass $m^*$ und $n^*$ ganzzahlig sind.

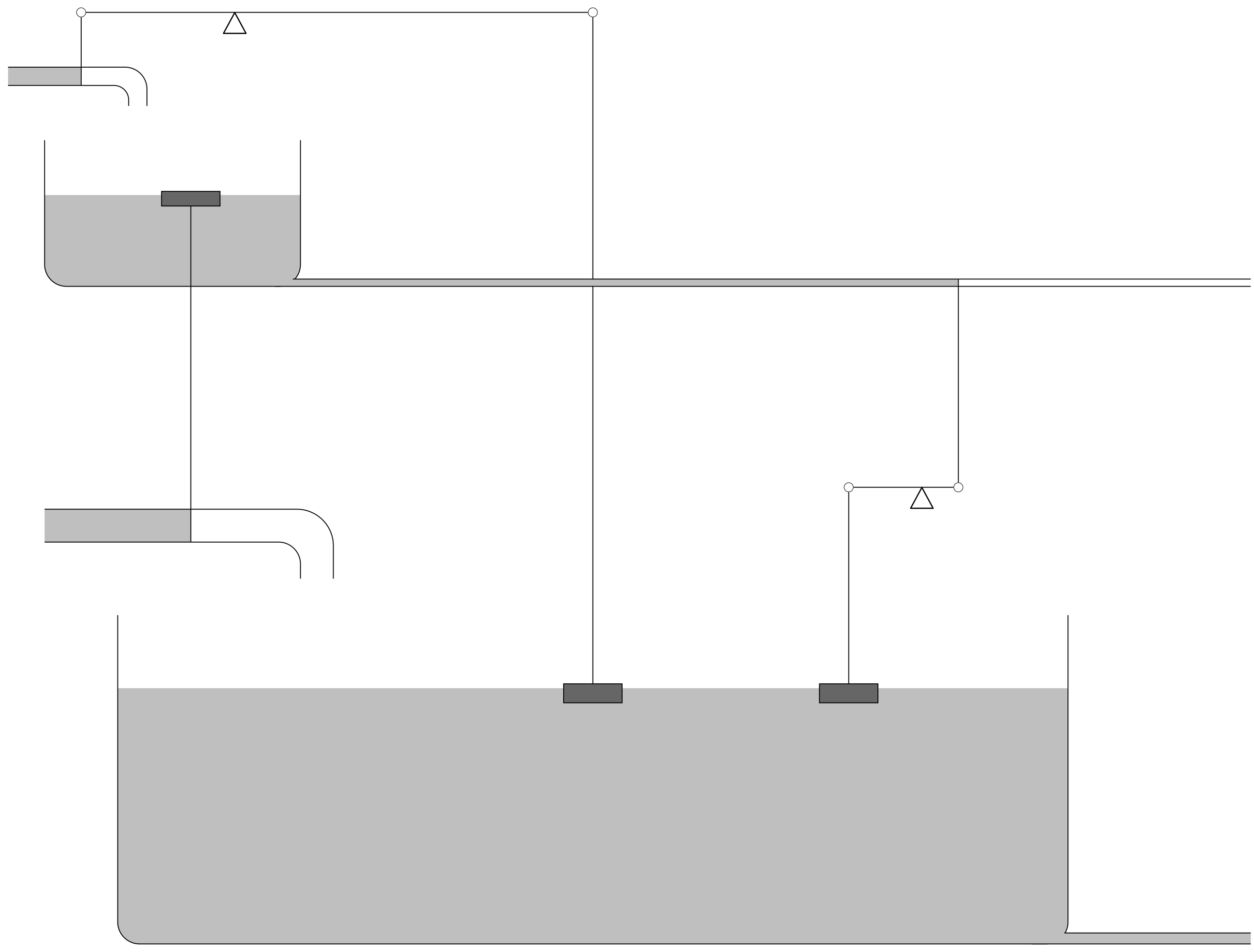
$$\begin{aligned} n^* &= m - n \\ m^* &= n - n^* \end{aligned}$$

# Argumentieren, Begründen und Beweisen

Erstrebenswert wäre es, eine Lernumgebung zu schaffen, in der Zusammenhänge entdeckt bzw. vermutet werden können. Erst hierauf würden Aktivitäten in Richtung Argumentieren, Begründen und Beweisen folgen.

Um anderen zu vermitteln, dass eine Behauptung zutreffend ist, kann es hilfreich sein, zunächst die Plausibilität der Behauptung zu belegen. Hierbei ist das Vorwissen zu berücksichtigen. Der Begründungsstrang könnte als naheliegendes Weiterdenken von schon Bekanntem erscheinen und so die Behauptung verstehbar machen. Ebenso würde ein geführtes Nachentdecken zum angestrebten Ziel des Überzeugtseins führen. Dieses kann durch bloßes Verifizieren verfehlt werden.
Zunächst ist aber eine Situation der gespannten Neugierde zu schaffen. Anhand einer als interessant empfundenen Themenstellung werden Fragen und Vermutungen formuliert, die im Weiteren zu untersuchen sind. Der Spannungsbogen ist aufrecht zu erhalten. Der erhoffte Wissenszuwachs ist die treibende Kraft - und nicht die Furcht vor der nächsten Klassenarbeit.

# Regelung



Mit Hilfe des kleinen Beckens soll der Wasserstand des großen Beckens auf gleichbleibender Höhe gehalten werden, auch wenn Wasser hineingeschüttet oder entnommen würde.
Hierzu dienen die beiden Wasserzuläufe, die Schwimmer, die Wippen, usw.
Aus dem großen Becken entweicht ständig eine geringere Menge Wasser als durch den Wasserzulauf hinzufließen könnte.

Erläutere, was passiert, wenn der Wasserspiegel im großen Becken steigt bzw. sinkt.