

Binomialkoeffizient

1. n -Fakultät
2. Binomialkoeffizient
3. Urnenmodell
4. Pascalsches Dreieck, rekursive Beziehung
5. Kürzeste Wege
6. Permutationen
7. Binomialkoeffizient
8. Binomialkoeffizient
9. Pascalsches Dreieck

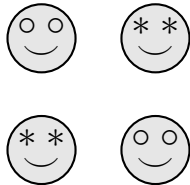
Für den Anfang geeignet

↑ n -Fakultät

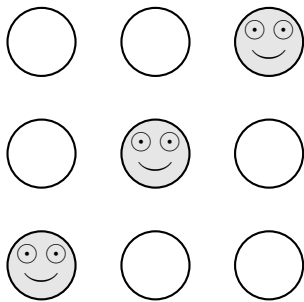
Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Kinder in einer Reihe zu platzieren, z.B. für $n = 5$?



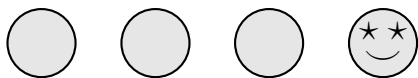
Für $n = 2$ gibt es 2 Möglichkeiten.



Für $n = 3$ hat das 3. Kind 3 Möglichkeiten, die beiden restlichen Plätze können jeweils auf 2 Weisen besetzt werden. Insgesamt gibt es $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten.



Für $n = 4$ hat das 4. Kind 4 Möglichkeiten, die restlichen 3 Plätze können jeweils auf $2 \cdot 3 = 6$ Weisen besetzt werden. Insgesamt gibt es $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.



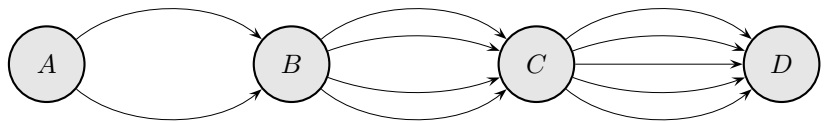
Für $n = 5$ ergeben sich $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Möglichkeiten.

Für das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ schreiben wir kürzer $5!$ und allgemein:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Es gilt die rekursive Beziehung: $n! = n \cdot (n-1)!$,
d.h. die Berechnung einer Fakultät kann auf die Berechnung der Fakultät einer kleineren Zahl zurückgeführt werden.

↑ Binomialkoeffizient



1. Wie viele Wege führen von A nach D ?

2. Herr M. will seine 4 Kinder für ein Gruppenfoto in einer Reihe anordnen. Wie viele Möglichkeiten bestehen für das 1. Kind, wie viele Möglichkeiten verbleiben für das 2. Kind?
Wie viele Möglichkeiten der Platzierung gibt es insgesamt?

3. Eine Münze wird n -mal geworfen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass genau k -mal eine Zahl auftritt?
 - a) $n = 5, k = 1$
 - b) $n = 4, k = 2$
 - c) $n = 4, k = 3$
 - d) $n = 5, k = 2$
 - e) $n = 5, k = 3$
 - f) $n = 10, k = 4$

Die Anzahl der Möglichkeiten wird mit $\binom{n}{k}$ (lies: n über k) bezeichnet.

- a) Für $n = 5, k = 1$ können alle Möglichkeiten ohne Schwierigkeit aufgeschrieben werden (Zahl 1, Wappen 0):

(1, 0, 0, 0, 0)
 (0, 1, 0, 0, 0)
 ...

- b) (1, 1, 0, 0)
 (0, 1, 0, 1)
 ...

Für $n = 4, k = 2$ erhalten wir einen tieferen Einblick in die Zusammenhänge, wenn wir uns zunächst die beiden Einsen als verschieden vorstellen, z. B. als \uparrow und \uparrow .

Gesucht ist also die Anzahl aller Muster:

($\uparrow, \uparrow, 0, 0$)
 (0, $\uparrow, 0, \uparrow$)
 ...

Die Anzahl der Muster ist sofort zu erkennen, wenn man bedenkt, dass anfänglich für \uparrow 4 Plätze möglich sind und für \uparrow anschließend nur noch 3.

In welcher Beziehung steht nun die in b) gesuchte Anzahl $\binom{4}{2}$ zur Anzahl dieser Muster?

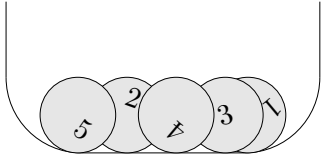
Die Anzahl der Muster muss doppelt so groß sein, da

(1, 1, 0, 0) den Mustern ($\uparrow, \uparrow, 0, 0$) und ($\uparrow, \uparrow, 0, 0$) entspricht, desgleichen
 (1, 0, 1, 0) den Mustern ($\uparrow, 0, \uparrow, 0$) und ($\uparrow, 0, \uparrow, 0$) usw.

Damit ergibt sich: $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

↑ Urnenmodell

In einer Urne befinden sich 5 nummerierte Kugeln.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit einem Griff (die Reihenfolge ist also unerheblich) der Urne drei Kugeln zu entnehmen?



Einige der Möglichkeiten sind:

$$\{2, 4, 5\}$$

$$\{1, 2, 4\}$$

$$\{1, 3, 5\}$$

Die geschweiften Mengen-Klammern deuten an, dass es uns nicht auf die Reihenfolge ankommt. Die drei Kugeln könnten wir auch einzeln ziehen.

Die gesuchte Anzahl beträgt: $\binom{5}{3} = 10$.

Dies ist die Anzahl aller 0-1-Folgen der Länge 5 mit genau 3 Einsen. Zwischen diesen 0-1-Folgen und den 3-elementigen Teilmengen gibt es eine direkte Entsprechung, z. B.:

$$(0, 1, 0, 1, 1) \longleftrightarrow \{2, 4, 5\}$$

$$(1, 1, 0, 1, 0) \longleftrightarrow \{1, 2, 4\}$$

$$(1, 0, 1, 0, 1) \longleftrightarrow \{1, 3, 5\}$$

$$(1, 2, 3, 4, 5) \quad 1 \text{ bedeutet: in der Teilmenge enthalten.}$$

Allgemein gilt:

Einer Urne mit n Kugeln werden mit einem Griff k Kugeln entnommen.

Hierzu gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

↑ Binomialkoeffizient Ergänzung

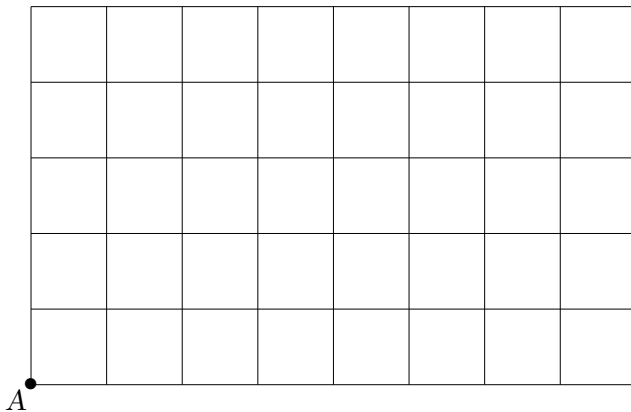
Binomialkoeffizienten sind die Lösung für viele Abzählprobleme.

$\binom{8}{3}$ ist die Anzahl aller 0-1-Folgen der Länge 8 mit genau 3 Einsen,

z.B. (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) oder
 (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0).

Interpretiere die 0-1-Folgen als Wege, die in A beginnen,
0 bedeutet eine waagerechte Strecke, 1 eine senkrechte.
Zeichne den Punkt B ein, in dem die Wege enden.

Schreibe an jeden Gitterpunkt die Anzahl der kürzesten Wege,
die in A beginnen und zu dem Gitterpunkt führen.
Welche Zusammenhänge sind zu erkennen?



	1	6	21	56	126	252	462	792	1287
1	1	5	15	35	70	126	210	330	495
1	1	4	10	20	35	56	84	120	165
1	1	3	6	10	15	21	28	36	45
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Die rekursive Beziehung:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

bedeutet hier, dass sich die Anzahl der Wege zu einem Gitterpunkt als Summe der Wege zu zwei benachbarten Gitterpunkten ergibt.

↑ Permutationen



Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen

- a) 1, 2
- b) 1, 2, 3
- c) 1, 2, 3, 4, 5, 6

auf die 6 Plätze zu verteilen?

Für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ schreiben wir kürzer $6!$
und allgemein:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n = n! \quad \text{lies: } n\text{-Fakultät}$$

$n!$ ist die Anzahl der Möglichkeiten (Permutationen), n Elemente in einer Reihe anzuordnen, zu permutieren.

↑ Binomialkoeffizient

$\binom{8}{3}$ (lies: 8 über 3) sei die Anzahl aller 0-1-Folgen der Länge 8 mit genau 3 Einsen, z. B.
(1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0).

$\binom{n}{k}$ sei die Anzahl aller 0-1-Folgen der Länge n mit genau k Einsen.

Offensichtlich ist $\binom{8}{1} = 8$.

(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

...

Um $\binom{8}{2}$ zu ermitteln, ersetzen wir in den Folgen mit genau einer 1 zunächst eine 0 durch eine 2.
Wenn wir eine 0 durch eine 1 ersetzen würden, wäre die Anzahl der Möglichkeiten im Dunkeln.

(1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

(1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0)

...

(2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

(2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)

...

Es entstehen $8 \cdot 7$ Folgen.

Ersetzen wir nun die 2 durch eine 1, so liegen nur noch $\frac{8 \cdot 7}{2}$ verschiedene Folgen mit zwei Einsen vor.

(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)

...

Daher gilt $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2}$.

Um $\binom{8}{3}$ zu ermitteln, ersetzen wir in den Folgen mit zwei Einsen eine 0 durch eine 3.

(1, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 0)

(1, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0)

(3, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)

...

Es entstehen ... Folgen.

Ersetzen wir nun die 3 durch eine 1, so liegen nur noch ... verschiedene Folgen mit drei Einsen vor.

↑

↑ Binomialkoeffizient

Um $\binom{8}{3}$ zu ermitteln, ersetzen wir in den Folgen mit zwei Einsen eine 0 durch eine 3.

(1, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 0)

(1, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0)

(3, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)

...

Es entstehen $\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 6$ Folgen.

Ersetzen wir nun die 3 durch eine 1, so liegen nur noch $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3}$ verschiedene Folgen mit drei Einsen vor.

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3}$$

Etwas einprägsamer:

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{mit } 5! \text{ erweitert}$$

Die Anzahl der 0-1-Folgen der Länge n mit k Einsen beträgt $\binom{n}{k}$.

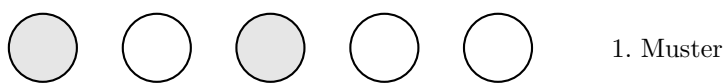
Eine 0/1-Münze wird 10-mal geworfen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5-mal die 1 erscheint?

GTR

10 nCr 5 MATH | PRB (engl.: n choose r, dt.: n über r)

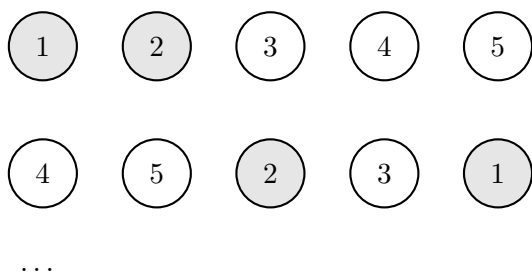
↑ Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$



Wir wollen herausfinden, wie viele Muster der abgebildeten Art es gibt.
 Von $n = 5$ Plätzen werden hier $k = 2$ ausgewählt.

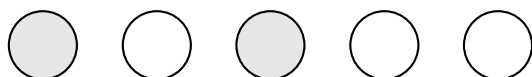
Die Anzahl wird mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet (sprich n über k). Wie groß ist diese Anzahl nun?

Wenn die 5 Elemente (Kugeln) nummeriert sind, können wir die Anzahl $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ der Permutationen (Vertauschungen) bestimmen. Für die 1 gibt es n Plätze, für die 2 sind es $n-1$ Plätze, usw. Die Färbung der Elemente 1 und 2 ist ohne Belang:



Die Anzahl der Permutationen kann auf eine zweite Art bestimmt werden.

Wir gehen von der (noch unbekannt) Anzahl $\binom{n}{k}$ der Muster aus.



Die grau gefärbten Plätze lassen sich auf 2-fache Weisen mit den Zahlen 1 und 2 belegen, die restlichen auf $3! = 6$ Arten mit 3, 4 und 5.

Insgesamt erhaltenen wir mit $\binom{5}{2} \cdot 2! \cdot 3!$ alle $5!$ Permutationen. Daraus folgt $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!}$

und mit derselben Überlegung allgemein: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

↑ Pascalsches Dreieck

$$1 = \binom{0}{0}$$

$$1 = \binom{1}{0} \quad 1 = \binom{1}{1}$$

$$1 = \binom{2}{0} \quad 2 = \binom{2}{1} \quad 1 = \binom{2}{2}$$

$$1 = \binom{3}{0} \quad 3 = \binom{3}{1} \quad 3 = \binom{3}{2} \quad 1 = \binom{3}{3}$$

$$1 = \binom{4}{0} \quad 4 = \binom{4}{1} \quad 6 = \binom{4}{2} \quad 4 = \binom{4}{3} \quad 1 = \binom{4}{4}$$

$$1 = \binom{5}{0} \quad 5 = \binom{5}{1} \quad 10 = \binom{5}{2} \quad 10 = \binom{5}{3} \quad 5 = \binom{5}{4} \quad 1 = \binom{5}{5}$$