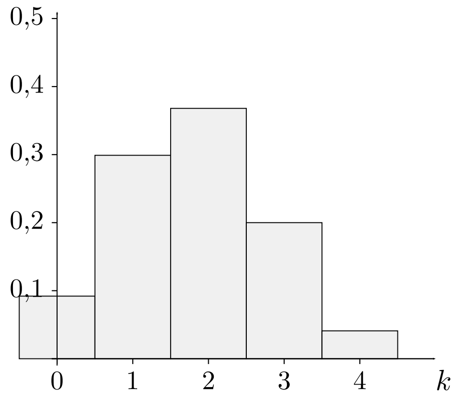
Standardabweichung   Daten analysieren

Die Tabelle enthält die Häufigkeit der Krankmeldungen innerhalb eines Jahres
der Arbeitnehmer eines Betriebes.

k	0	1	2	3	4
absolute Häufigkeit	92	299	368	200	41

Berechne die relativen Häufigkeiten (Prozentschreibweise) und stelle die Daten grafisch dar.

k	0	1	2	3	4
relative Häufigkeit h	9,2 %	29,9 %	36,8 %	20,0 %	4,1 %



Der Mittelwert $\overline{x}$ beträgt 1,8,
die mittlere lineare Abweichung 0,81
und die Standardabweichung $\sigma = 1{,}0$.
Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung.

k	0	1	2	3	4
relative Häufigkeit	9,2 %	29,9 %	36,8 %	20,0 %	4,1 %
Abweichung vom Mittelwert $\overline{x} - k$	1,8	0,8	−0,2	−1,2	−2,2
quadratische Abweichung vom Mittelwert $(\overline{x} - k)^2$	...				

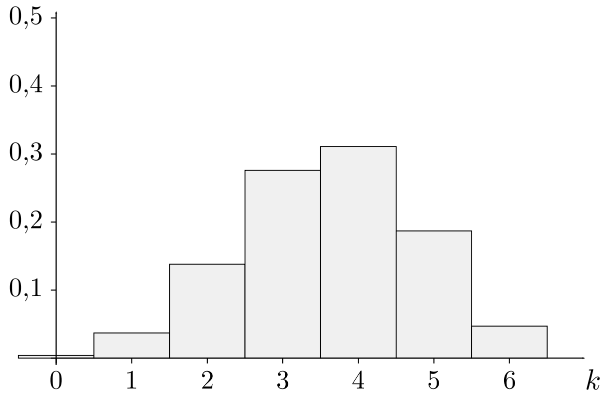
Führe die Berechnungen sowie die grafische Darstellung auch für folgende Daten aus:

k	0	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	4	37	138	276	311	187	47

Daten analysieren

Die Tabelle enthält die Häufigkeit der Krankmeldungen innerhalb eines Jahres der Arbeitnehmer eines Betriebes.

k	0	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	4	37	138	276	311	187	47



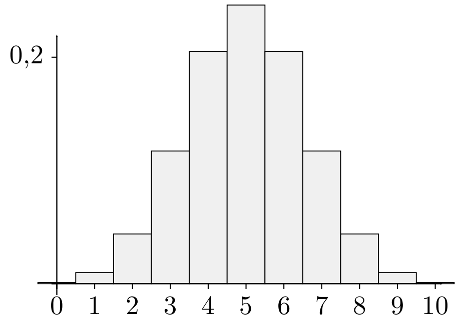
k	0	1	2	3	4	5	6	Summe
absolute Häufigkeit	4	37	138	276	311	187	47	1000
$(\overline{x}-k)^2h$	0,052	0,250	0,353	0,099	0,050	0,367	0,271	1,442

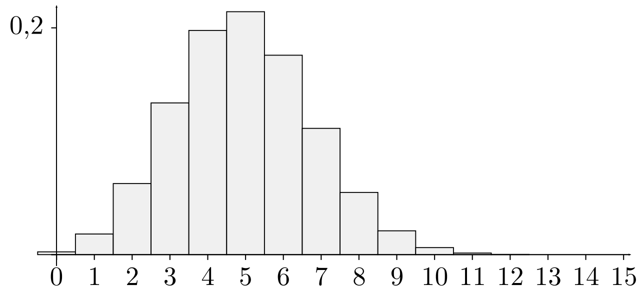
Varianz 1,442

Es geht jedoch auch einfacher mit: STAT | CALC 1: 1−Var Stats L1, L2

Der Mittelwert $\overline{x}$ beträgt 3,6
die mittlere lineare Abweichung 1,01
und die Standardabweichung $\sigma = 1{,}2$.

Standardabweichung





Die beiden Wahrscheinlichkeits-Verteilungen haben denselben Erwartungswert $\mu = 5$, jedoch sind sie unterschiedlich um den Erwartungswert konzentriert. Dieser Streuung wollen wir uns zuwenden.

Sei die Verteilung ($n = 4$)

k	a_1	a_2	a_3	a_4
$P(X = k)$	p_1	p_2	p_3	p_4

gegeben. Dann ist der Erwartungswert

$$\mu = E(X) \;=\; a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4.$$

Die Abweichung von a_1 zum Erwartungswert beträgt $|\,a_1 - \mu\,|$, sie wird mit der Wahrscheinlichkeit p_1 angenommen. Der Erwartungswert für die Abweichung ist dann

$$d \;= |\,a_1 - \mu\,|\,p_1 + |\,a_2 - \mu\,|\,p_2 + |\,a_3 - \mu\,|\,p_3 + |\,a_4 - \mu\,|\,p_4$$

Mit der Umformung $|\,a_1 - \mu\,| = \sqrt{(a_1 - \mu)^2}$ können die Beträge ersetzt werden, dies ergibt:

$$d \;=\; \sqrt{(a_1 - \mu)^2} \cdot p_1 + \sqrt{(a_2 - \mu)^2} \cdot p_2 + \sqrt{(a_3 - \mu)^2} \cdot p_3 + \sqrt{(a_4 - \mu)^2} \cdot p_4$$

Weit bedeutsamer als Maß für die Streuung ist die sogenannte Standardabweichung:

$$\sigma \;=\; \sqrt{(a_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (a_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (a_3 - \mu)^2 \cdot p_3 + (a_4 - \mu)^2 \cdot p_4}$$

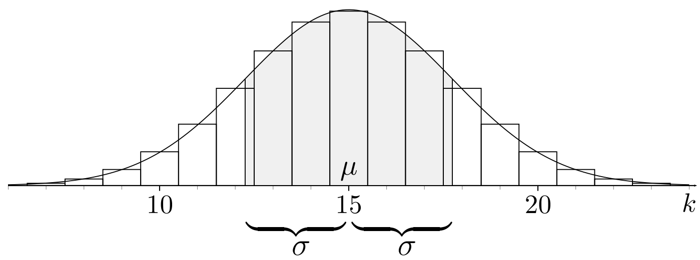
Hierdurch liegt keine Ungenauigkeit ($d \neq \sigma$) vor, vielmehr wird mit σ ein eigenständiger Abstand zum Erwartungswert festgelegt, der eine anschauliche Bedeutung besitzt.

$n = 30$

$p = 0{,}5$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \quad \mu = n\,p$

(z. B. 30-maliges Werfen einer Münze, X Anzahl von “Zahl“)



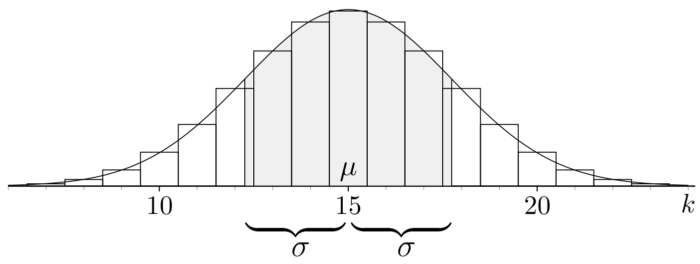
Wird durch das Histogramm einer Binomialverteilung eine Ausgleichskurve gelegt (Gauß’sche Glockenkurve), so gibt σ, wie wir später sehen werden, die Entfernung der Wendepunkte der Kurve vom Erwartungswert μ an. σ kann zudem leicht bestimmt werden: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Standardabweichung Fortsetzung

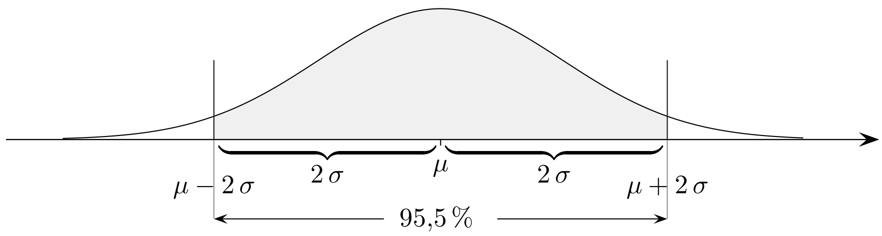
$n = 30$

$p = 0{,}5$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \qquad \mu = n\,p$



Es lässt sich unter anderem zeigen, dass für Binomialverteilungen (falls $\sigma > 3$) das Stichprobenergebnis mit 95,5 %-iger Wahrscheinlichkeit innerhalb der 2σ-Umgebung liegt und mit 99,7 %-iger Wahrscheinlichkeit innerhalb der 3σ-Umgebung. Liegt ein Stichprobenergebnis außerhalb der 2σ-Umgebung, so bestehen ernsthafte Zweifel an der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeit p.



Als Varianz wird

$$V(X) \;=\; (a_1-\mu)^2\cdot p_1 + (a_2-\mu)^2\cdot p_2 + (a_3-\mu)^2\cdot p_3 + (a_4-\mu)^2\cdot p_4$$

bezeichnet. Dann ist

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Zeige für $n = 4$: $\quad V(X) \;=\; a_1^2p_1 + a_2^2p_2 + a_3^2p_3 + a_4^2p_4 - \mu^2 \qquad (= E(X^2) - \mu^2)$

Berechne damit die Standardabweichung

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	27,46 %	44,36 %	23,89 %	4,29 %

Lösung:
$\sigma = 0{,}826$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Sei die Verteilung

k	a_1	a_2	a_3
$P(X=k)$	p_1	p_2	p_3

gegeben.
Dann beträgt der Erwartungswert

$$\mu = E(X) \;=\; a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$$

und die Varianz:

$$\begin{aligned}
V(X) \;&=\; (a_1-\mu)^2\cdot p_1 + (a_2-\mu)^2\cdot p_2 + (a_3-\mu)^2\cdot p_3 \\
&=\; (a_1^2 - 2a_1\mu + \mu^2)\cdot p_1 \\
&\qquad + (a_2^2 - 2a_2\mu + \mu^2)\cdot p_2 \\
&\qquad\qquad + (a_3^2 - 2a_3\mu + \mu^2)\cdot p_3 \\
&=\; a_1^2\cdot p_1 + a_2^2\cdot p_2 + a_3^2\cdot p_3 \\
&\qquad - 2\mu\underbrace{(a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3)}_{\mu} \\
&\qquad\qquad + \mu^2\underbrace{(p_1+p_2+p_3)}_{1} \\
&=\; a_1^2\cdot p_1 + a_2^2\cdot p_2 + a_3^2\cdot p_3 \;-\; 2\mu\mu \;+\; \mu^2 \\
V(X) \;&=\; E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}$$

Standardabweichung GTR

Sei die Verteilung ($n = 4$)

k	a_1	a_2	a_3	a_4
$P(X=k)$	p_1	p_2	p_3	p_4

gegeben. Dann kann der Erwartungswert

$$\mu = E(X) \ = \ a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4.$$

mit dem GTR bestimmt werden.
In die Listen L1 und L2 werden die Werte $a_1, \ldots$ und $p_1, \ldots$ eingetragen und
2nd LIST | MATH 3: mean(L1, L2) aufgerufen.

L1	L2	L3
a_1	p_1	
a_2	p_2	
...	...	

Um die Standardabweichung zu ermitteln, wird zunächst die sogenannte Varianz bestimmt und aus diesem Wert die Wurzel gezogen.

$$V(X) \ = \ (a_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (a_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (a_3 - \mu)^2 \cdot p_3 + (a_4 - \mu)^2 \cdot p_4$$

Die Varianz ist der Erwartungswert der quadratischen Abweichungen $(a_1 - \mu)^2, \ldots$
Daher werden diese Werte in L3 mit "$(\text{L1} - \mu)^2$ eingefügt
und 2nd LIST | MATH 3: mean(L3, L2) aufgerufen.

"$(\text{L1} - \mu)^2$

L1	L2	L3
a_1	p_1	
a_2	p_2	
...	...	

Es geht jedoch auch einfacher mit: STAT | CALC 1: 1−Var Stats L1, L2

Beispiel:

k	0	1	2	4
$P(X=k)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

$E(X) = 1{,}57$
$V(X) = 2{,}82$
$\sigma = 1{,}68$