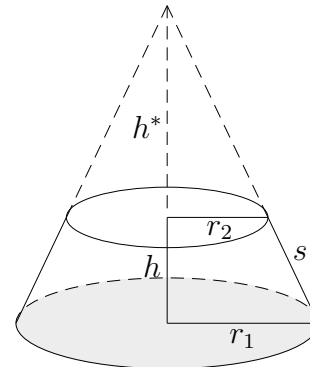
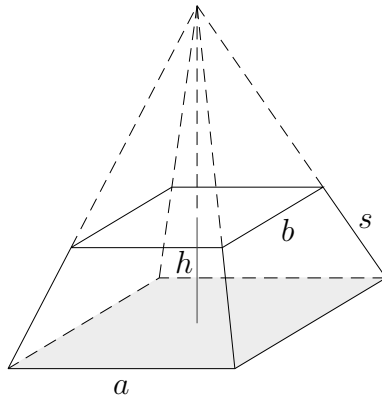


Pyramiden- und Kegelstumpf



Für das Volumen von Stümpfen gilt allgemein:

$$V_{\text{Stumpf}} = \frac{1}{3} h (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2)$$

Für einen Kegelstumpf bedeutet dies:

$$V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

Beim Beweis ist zu beachten, dass für den Pyramidenstumpf

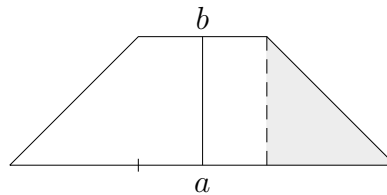
$$h^* = \frac{hb}{a-b} \text{ ist, für den Kegelstumpf gilt: } h^* = \frac{hr_2}{r_1-r_2}.$$

Bei einer Umformung wird die 3. binomische Formel angewendet.

1. Ein Korken hat die Form eines Kegelstumpfs mit $r_1 = 18 \text{ mm}$, $r_2 = 12 \text{ mm}$, $h = 32 \text{ mm}$. Welche Masse haben 1000 Stück? (Dichte von Kork $\rho = 0,24 \text{ g/cm}^3$)
2. Ein quadratischer Pyramidenstumpf hat die Höhe $h = 3 \text{ cm}$. Die große Grundkante ist dreimal so lang wie die kleine. Die Seitenflächen sind um 45° gegen die Grundfläche geneigt. Bestimme die Länge der Grund- und Seitenkanten, sowie das Volumen und die Mantelfläche.
3. Für einen Kegelstumpf gilt: $V = 11 \text{ m}^3$, $r_1 = 2 \text{ m}$, $r_2 = 1 \text{ m}$. Wie groß ist der Böschungswinkel α , den eine Mantellinie mit der Grundfläche einschließt?
4. Ein Kegelstumpf ist 7 cm hoch, das Volumen beträgt $V = 2441,017 \text{ cm}^3$ und der Grundkreisradius ist $r_1 = 12 \text{ cm}$. Wie groß ist der Decksradius r_2 ?
5. Von einem Kegel sind gegeben: $V = 2,5 \text{ dm}^3$, $h = 2 \text{ dm}$. Berechne die Länge einer Mantellinie s .
6. Ein Kelchglas hat einen Inhalt von $0,5 \text{ l}$, der Öffnungswinkel beträgt 60° . Die Eichmarke ist 1 cm vom oberen Rand entfernt. Wie hoch ist das Glas?

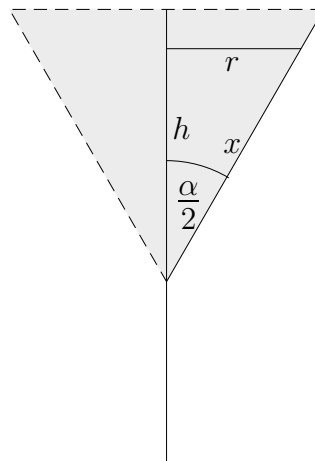
Pyramiden- und Kegelstumpf Ergebnisse

- Ein Korken hat die Form eines Kegelstumpfs mit $r_1 = 18 \text{ mm}$, $r_2 = 12 \text{ mm}$, $h = 32 \text{ mm}$.
Welche Masse haben 1000 Stück? (Dichte von Kork $\rho = 0,24 \text{ g/cm}^3$) $m = 5,50 \text{ kg}$
- Ein quadratischer Pyramidenstumpf hat die Höhe $h = 3 \text{ cm}$. Die große Grundkante ist dreimal so lang wie die kleine. Die Seitenflächen sind um 45° gegen die Grundfläche geneigt.
Bestimme die Länge der Grund- und Seitenkanten, sowie das Volumen und die Mantelfläche.



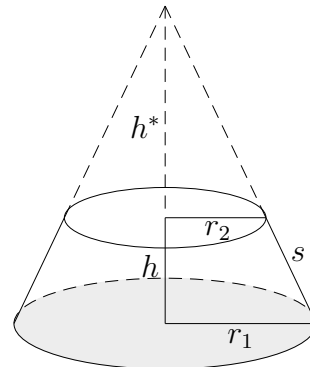
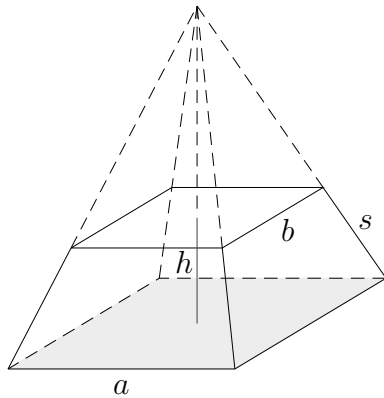
$$\begin{aligned}
 a &= 9 \text{ cm} \\
 b &= 3 \text{ cm} \\
 s &= \sqrt{27} \text{ cm} \\
 s &= 5,20 \text{ cm} \\
 V &= 117 \text{ cm}^3 \\
 M &= 101,82 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

- Für einen Kegelstumpf gilt: $V = 11 \text{ m}^3$, $r_1 = 2 \text{ m}$, $r_2 = 1 \text{ m}$.
Wie groß ist der Böschungswinkel α , den eine Mantellinie mit der Grundfläche einschließt? $h = 1,5 \text{ m}$
 $\alpha = 56,3^\circ$
- Ein Kegelstumpf ist 7 cm hoch, das Volumen beträgt $V = 2441,017 \text{ cm}^3$ und der Grundkreisradius ist $r_1 = 12 \text{ cm}$. Wie groß ist der Deckkreisradius r_2 ? $r_2 = 9 \text{ cm}$
- Von einem Kegel sind gegeben: $V = 2,5 \text{ dm}^3$, $h = 2 \text{ dm}$.
Berechne die Länge einer Mantellinie s . $r = 1,09 \text{ dm}$
 $s = 2,28 \text{ dm}$
- Ein Kelchglas hat einen Inhalt von $0,5 \text{ l}$, der Öffnungswinkel beträgt 60° . Die Eichmarke ist 1 cm vom oberen Rand entfernt. Wie hoch ist das Glas?



$$\begin{aligned}
 r &= x \cdot \sin 30^\circ \\
 h &= x \cdot \cos 30^\circ \\
 \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \\
 \cos 30^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \\
 V &= \frac{1}{24} \pi x^3 \cdot \sqrt{3} \\
 h_{\text{Kelch}} &= (x + 0,1) \cdot \cos 30^\circ \\
 h_{\text{Kelch}} &= 1,21 \text{ dm}
 \end{aligned}$$

Pyramiden- und Kegelstumpf Übungsaufgaben



1. Von einem quadratischen Pyramidenstumpf sind gegeben (in cm): $a = 8$, $b = 6$, $h = 5$, gesucht sind:
 - a) Höhe der Ergänzungspyramide,
 - b) Inhalt der Trapezseitenfläche,
 - c) Volumen des Pyramidenstumpfs,
 - d) Länge der Seitenkante s .
2. Variation der 1. Aufgabe
Gegeben sind: $a = 8$, $b = 4$, $h = 6$.
3. Von einem Kegelstumpf sind gegeben (in cm): $r_1 = 8$, $r_2 = 6$, $h = 5$, gesucht sind:
 - a) Höhe des Ergänzungskegels,
 - b) Volumen des Kegelstumpfs,
 - c) Länge der Mantellinie s ,
 - d) Inhalt der Mantelfläche des Kegelstumpfs.
4. Variation der 3. Aufgabe
Gegeben sind: $r_1 = 9$, $r_2 = 5$, $h = 4$.

Pyramiden- und Kegelstumpf Lösungen

1. a) $h^* = 15$
b) $A_{\text{Trapez}} = 7\sqrt{26}$
c) $V_{\text{Pyramidenstumpf}} = \frac{740}{3}$
d) $s = 3\sqrt{3}$

2. a) $h^* = 6$
b) $A_{\text{Trapez}} = 12\sqrt{10}$
c) $V_{\text{Pyramidenstumpf}} = 224$
d) $s = 2\sqrt{11}$

3. a) $h^* = 15$
b) $V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{740}{3}\pi$
c) $s = \sqrt{29}$
d) $A_{\text{Mantel}} = 14\pi\sqrt{29}$

4. a) $h^* = 5$
b) $V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{604}{3}\pi$
c) $s = 4\sqrt{2}$
d) $A_{\text{Mantel}} = 56\pi\sqrt{2}$

Kelchglas Übungsaufgaben

1. Ein Kelchglas mit der Höhe $h = 20 \text{ cm}$ (ohne Stiel) und dem Öffnungswinkel (Winkel, den zwei gegenüberliegende Mantellinien einschließen) $\alpha = 90^\circ$ wird gefüllt:

- a) mit 100 cm^3 ,
- b) zu einem Drittel.

Berechne die Füllhöhe.

2. Ein Kelchglas mit der Höhe $h = 8 \text{ cm}$ (ohne Stiel) und dem Öffnungskreisradius $r = 4 \text{ cm}$ wird gefüllt:

- a) mit 100 cm^3 ,
- b) zur Hälfte.

Berechne die Füllhöhe.

Lösungen

- 1. a) $h^* = 4,57 \text{ cm}$
- b) $h^* = 13,87 \text{ cm}$

- 2. a) $h^* = 7,25 \text{ cm}$
- b) $h^* = 6,35 \text{ cm}$