Potenzen

1. a) $x^3 \cdot x^5$ b) $y^4 \cdot y$

   c) $5^3 \cdot 5^{-2}$ d) $4^{-3} \cdot 4^5$

   e) $(3\,x^2\,y)^3$ f) $(4\,a^4\,b^3)^2$

   g) $-2^2 - (-3)^3$ h) $(-4)^2 + 4^2$

   i) $\dfrac{4^2}{4^{-1}}$ j) $\dfrac{3^{-2}}{3^{-3}}$

   k) $(\dfrac{2x}{y})^3 - \dfrac{x^3}{y^3}$ l) $(\dfrac{2a}{b^2})^4 - \dfrac{4a^4}{b^8}$

   m) $\dfrac{x^4 + x^3}{x^2}$ n) $\dfrac{y^3}{y^3 - y^4}$

   o) $(x^3 - 3x^2)^2$ p) $(4a + a^2)^2$

   q) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1 + x^2}{x^3}$ r) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1 - x}{x^2}$

   s) $4 \cdot 3^n - 3^n$ t) $20 \cdot 5^n + 5^{n+1}$

1. Rechenregel: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$3^4 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$$

2. Rechenregel: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$\frac{4^5}{4^2} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}} = 4^3$$

3. Rechenregel: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$$a^3 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = ab \cdot ab \cdot ab = (ab)^3$$

4. Rechenregel: $\dfrac{a^n}{b^n} = (\dfrac{a}{b})^n$

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = (\frac{a}{b})^3$$

5. Rechenregel: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6$$

Definitionen:

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a}_{n\text{-mal}}$

2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

3. $a^0 = 1$

4. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Die Besonderheit von a^0 und a^{-1} wird durch das Zahlenbeispiel veranschaulicht:

$$\begin{array}{lcll} 10^3 & = & 1000 & \mid \ :10 \\ 10^2 & = & 100 & \mid \ :10 \\ 10^1 & = & 10 & \mid \ :10 \\ 10^0 & = & 1 & \mid \ :10 \\ 10^{-1} & = & \frac{1}{10} & \mid \ :10 \\ 10^{-2} & = & \frac{1}{100} & \end{array}$$

Potenzen

1. a) $x^3 \cdot x^5$ b) $y^4 \cdot y$

   c) $5^3 \cdot 5^{-2}$ d) $4^{-3} \cdot 4^5$

   e) $(3\,x^2\,y)^3$ f) $(4\,a^4\,b^3)^2$

   g) $-2^2 - (-3)^3$ h) $(-4)^2 + 4^2$

   i) $\dfrac{4^2}{4^{-1}}$ j) $\dfrac{3^{-2}}{3^{-3}}$

   k) $(\dfrac{2x}{y})^3 - \dfrac{x^3}{y^3}$ l) $(\dfrac{2a}{b^2})^4 - \dfrac{4a^4}{b^8}$

   m) $\dfrac{x^4 + x^3}{x^2}$ n) $\dfrac{y^3}{y^3 - y^4}$

   o) $(x^3 - 3x^2)^2$ p) $(4a + a^2)^2$

   q) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1 + x^2}{x^3}$ r) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1 - x}{x^2}$

   s) $4 \cdot 3^n - 3^n$ t) $20 \cdot 5^n + 5^{n+1}$

Lösungen:

1. a) x^8 b) y^5

   c) $5^1 = 5$ d) $4^2 = 16$

   e) $27x^6\,y^3$ f) $16a^8\,b^6$

   g) $-4 - (-27) = 23$ h) $16 + 16 = 32$

   i) $4^{2-(-1)} = 4^3 = 64$ j) $3^{-2-(-3)} = 3$

   k) $\dfrac{8x^3}{y^3} - \dfrac{x^3}{y^3} = \dfrac{7x^3}{y^3}$ l) $\dfrac{16a^4}{b^8} - \dfrac{4a^4}{b^8} = \dfrac{12a^4}{b^8}$

   m) $\dfrac{\cancel{x^2}(x^2 + x)}{\cancel{x^2}} = x^2 + x$ n) $\dfrac{\cancel{y^3}}{\cancel{y^3}(\ldots)} = \dfrac{1}{1 - y}$

   o) $x^6 - 6x^5 + 9x^4$ p) $16a^2 + 8a^3 + a^4$

   q) $\dfrac{x^2 - 1 - x^2}{x^3} = -\dfrac{1}{x^3}$ r) $\dfrac{x - 1 + x}{x^2} = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

   s) $3^n(...) = ... = 3^{n+1}$ t) $5^n(...) = ... = 5^{n+2}$

1. Rechenregel: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$3^4{\cdot}3^2 = 3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3 = 3^6$

2. Rechenregel: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\dfrac{4^5}{4^2} = \dfrac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}} = 4^3$

3. Rechenregel: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^3{\cdot}b^3 = a{\cdot}a{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}b{\cdot}b = ab{\cdot}ab{\cdot}ab = (ab)^3$

4. Rechenregel: $\dfrac{a^n}{b^n} = (\dfrac{a}{b})^n$

$\dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = (\dfrac{a}{b})^3$

5. Rechenregel: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6$

Definitionen:

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \;...\; \cdot a}_{n\text{-mal}}$
2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
3. $a^0 = 1$
4. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Die Besonderheit von a^0 und a^{-1} wird durch das Zahlenbeispiel veranschaulicht:

$$\begin{array}{lcll} 10^3 & = & 1000 & \mid\ :10 \\ 10^2 & = & 100 & \mid\ :10 \\ 10^1 & = & 10 & \mid\ :10 \\ 10^0 & = & 1 & \mid\ :10 \\ 10^{-1} & = & \frac{1}{10} & \mid\ :10 \\ 10^{-2} & = & \frac{1}{100} & \end{array}$$

Potenzen aus $\mathbb{Q}$

1. $a^{-3} = \,?$

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}$$

Wenn wir jedoch stur nach der *2. Rechenregel:* $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
rechnen, erhalten wir

$$\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$$

Daher wird

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

festgelegt, allgemein:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

2. $a^0 = \,?$

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = 1$$

Mit der *2. Rechenregel* erhalten wir

$$\frac{a^2}{a^2} = a^0$$

Daher wird

$$a^0 = 1$$

festgelegt.

Die Rechenregeln können dann für alle ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$ verwendet werden.

3. $a^{\frac{1}{2}} = \,?$

Nach der *1. Rechenregel:* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ müsste gelten:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$$

Beispiel: $9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 9$

Für $9^{\frac{1}{2}}$ kommt daher nur $\sqrt{9} = 3$ in Frage.
Daher wird

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad \text{und allgemein} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

festgelegt.