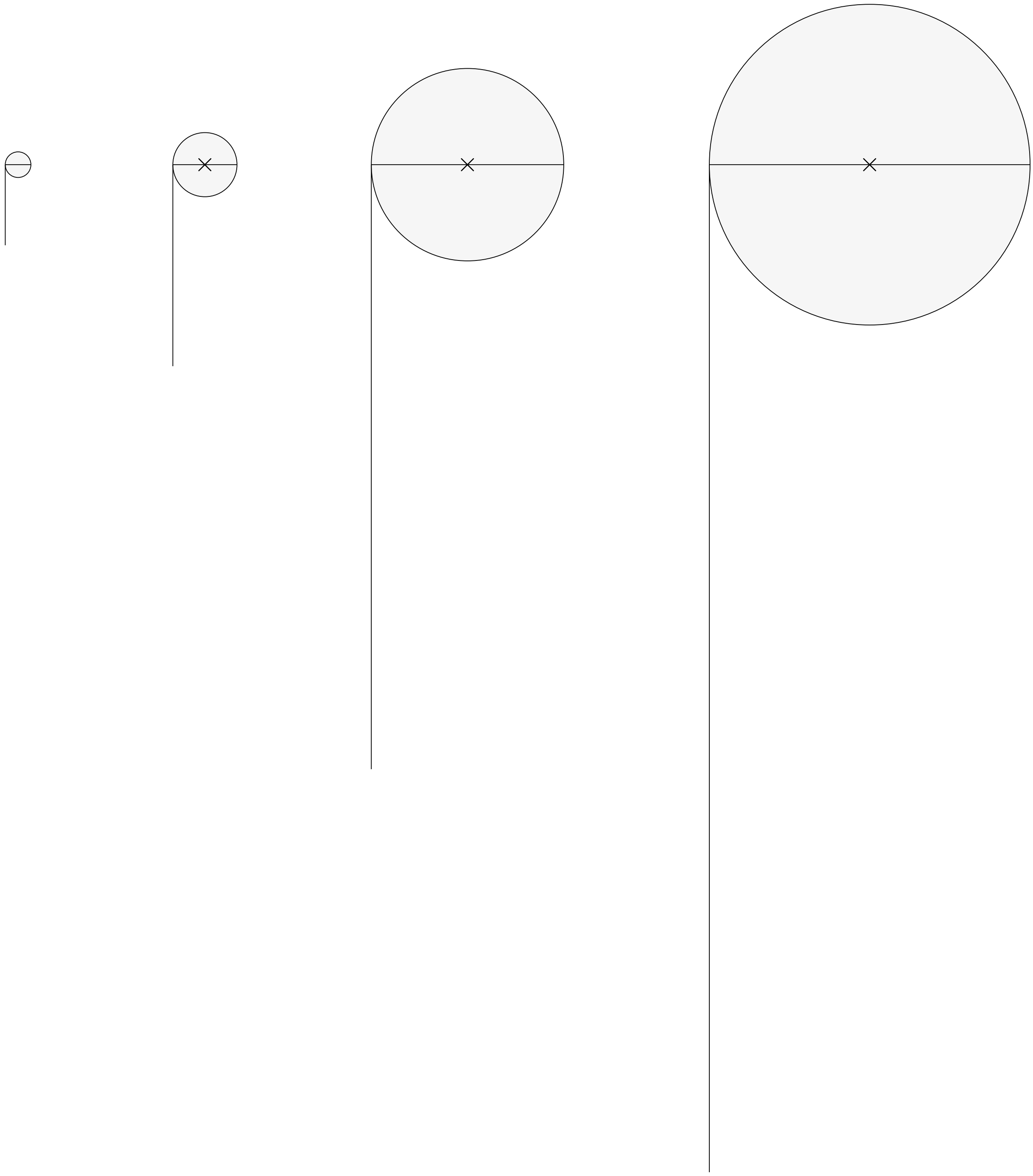
Umfang und Flächeninhalt des Kreises

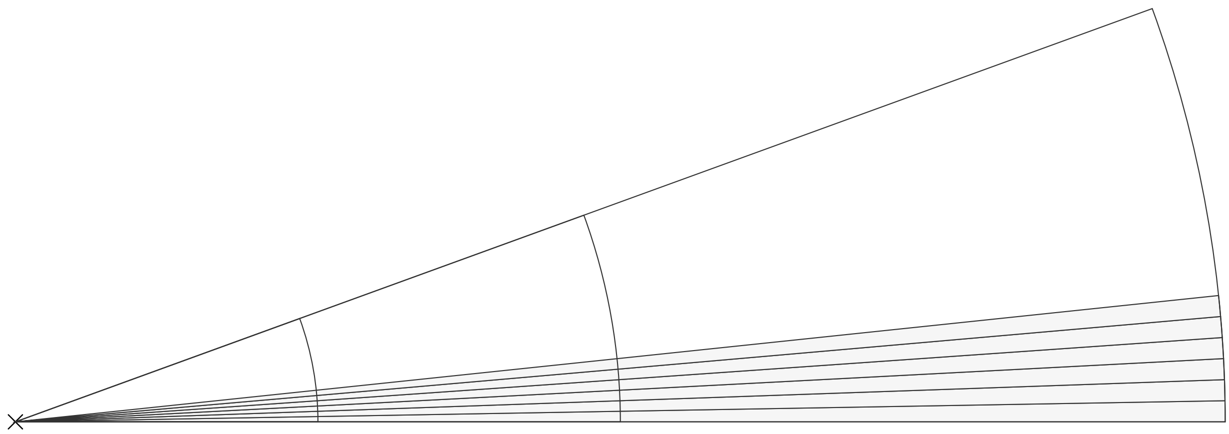
↑ Umfang des Kreises

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises? Stelle eine Vermutung auf.

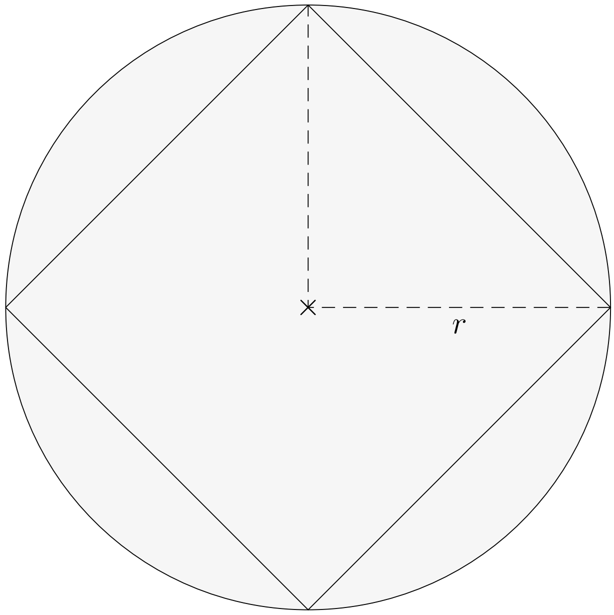


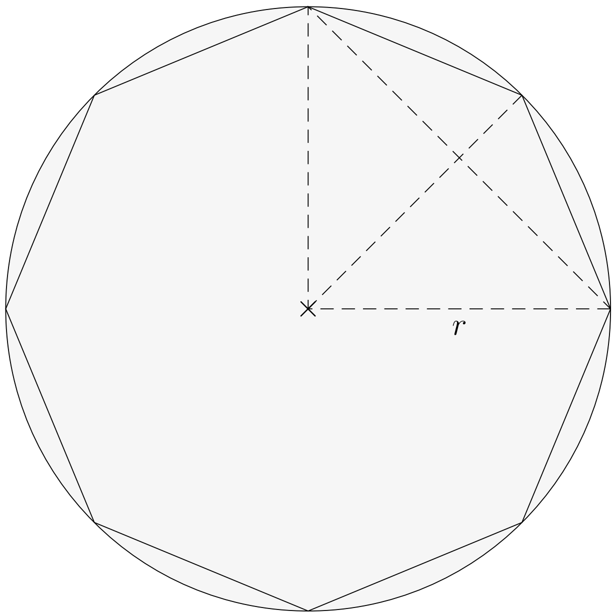
↑ Umfang des Kreises

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises?
Stelle eine Vermutung auf.



↑ Umfang des Kreises



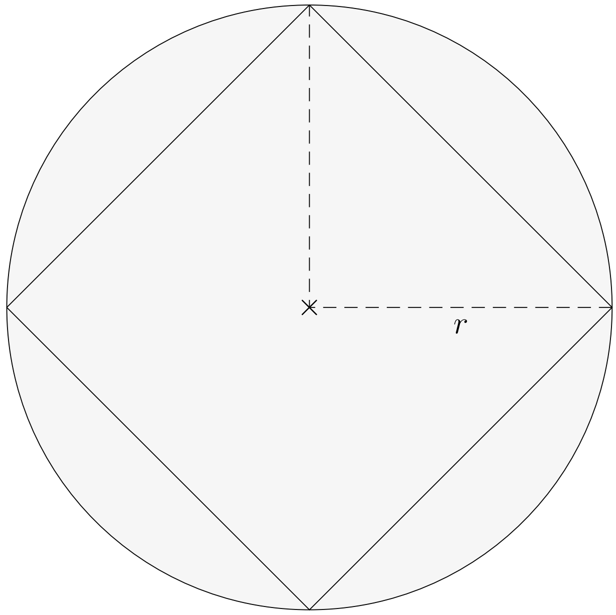


Um den Umfang eines Kreises mit dem Radius r zu bestimmen,
nähern wir den Kreis durch regelmäßige n-Ecke an (4-Eck, 8-Eck, …)
Die Kantenlänge eines n-Ecks sei s_n, der Umfang sei U_n.

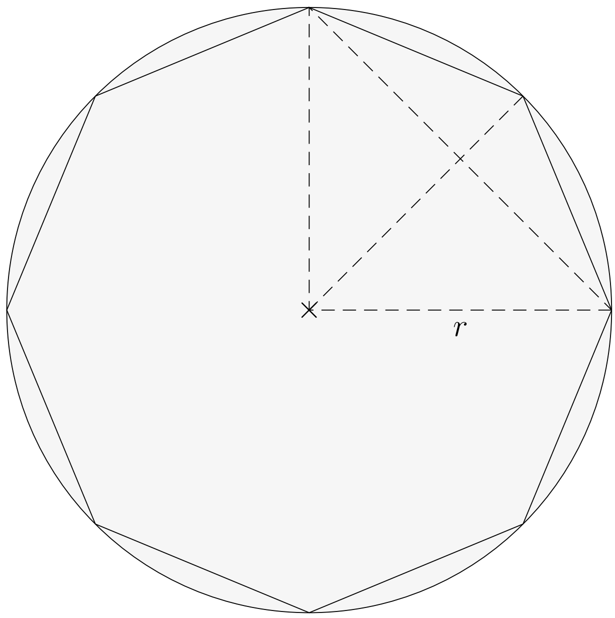
a) Bestimme für die n-Ecke ($n = 4, 8$) jeweils s_n und U_n.

b) Bestimme für die n-Ecke ($n = 4, 8$) jeweils die Zahl (auf 2 Nachkommastellen genau), mit der der Durchmesser d des Kreises multipliziert werden muss, um U_n zu erhalten.

↑ Umfang des Kreises



$$s_4 = r\sqrt{2}$$
$$U_4 = 4r\sqrt{2}$$
$$U_4 = d \cdot 2{,}83$$



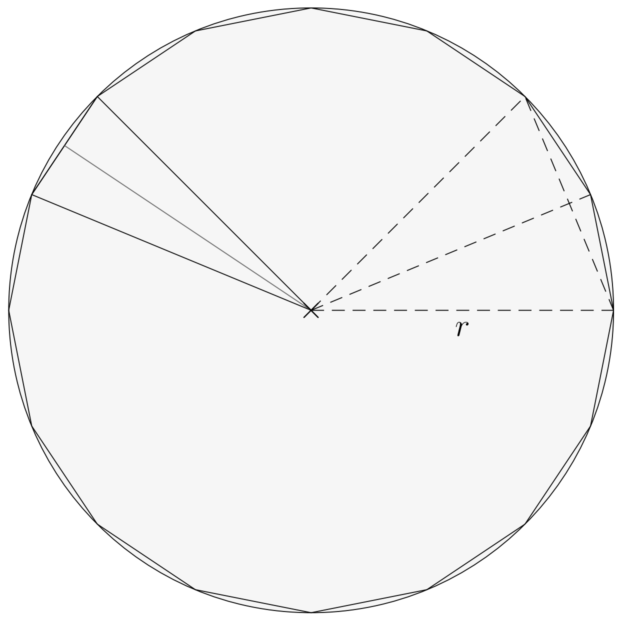
$$s_8^2 = (\tfrac{s_4}{2})^2 + (r - \sqrt{r^2 - (\tfrac{s_4}{2})^2}\ )^2$$
$$\vdots$$
$$s_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$U_8 = 8r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$U_8 = d \cdot 3{,}06$$

Um den Umfang eines Kreises mit dem Radius r zu bestimmen,
nähern wir den Kreis durch regelmäßige n-Ecke an (4-Eck, 8-Eck, …)
Die Kantenlänge eines n-Ecks sei s_n, der Umfang sei U_n.

a) Bestimme für die n-Ecke ($n = 4,\ 8$) jeweils s_n und U_n.

b) Bestimme für die n-Ecke ($n = 4,\ 8$) jeweils die Zahl (auf 2 Nachkommastellen genau), mit der der Durchmesser d des Kreises multipliziert werden muss, um U_n zu erhalten.

↑ Flächeninhalt des Kreises



$$
\begin{aligned}
s_{16} &= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
U_{16} &= 16r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
U_{16} &= d \cdot 3{,}12
\end{aligned}
$$

Für ein 64-Eck ergäbe sich: $U_{64} = d \cdot 3{,}14$
Die Konstante, mit der der Durchmesser d multipliziert werden muss, um den Umfang U des Kreises zu erhalten, heißt π.
$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\ ...$

Für einen Kreis mit dem Radius r gilt somit: $U = d \cdot \pi$ oder
$U = 2\pi r$

Um den Flächeninhalt des Kreises zu ermitteln,
bestimmen wir zunächst den Flächeninhalt des 16-Ecks:

$$
\begin{aligned}
A_{\text{16-Eck}} &= 16 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 16 \cdot \frac{s_{16} \cdot h}{2} = \frac{U_{16} \cdot h}{2} \\
A_{\text{16-Eck}} &\approx \frac{U_{16} \cdot r}{2} \qquad (\, h \approx r \,) \\
A_{\text{Kreis}} &= \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi\, r^2 \qquad (\, U_{16} \approx U_{\text{Kreis}} \,)
\end{aligned}
$$

Aufgaben:

1. Gegeben: $U_{\text{Kreis}} = 10\,cm$, gesucht r.
2. Gegeben: $A_{\text{Halbkreis}} = 4\,cm^2$, gesucht r.
3. Gegeben: $U_{\text{Kreis}} = 8\,cm$, gesucht A.

↑ Flächeninhalt des Kreises

Aufgaben:

1. Gegeben: $U_{\text{Kreis}} = 10\,cm$, gesucht r.
2. Gegeben: $A_{\text{Halbkreis}} = 4\,cm^2$, gesucht r.
3. Gegeben: $U_{\text{Kreis}} = 8\,cm$, gesucht A.

Lösungen:

1. $r \;=\; 1{,}59\,cm$
2. $r \;=\; 1{,}60\,cm$
3. $A \;=\; 5{,}09\,cm^2$

Archimedes (287 bis 212) verwendete ein 96-Eck zur näherungsweisen Berechnung von $\pi \approx 3{,}14$.
Zur Berechnung von π existieren viele Formeln:

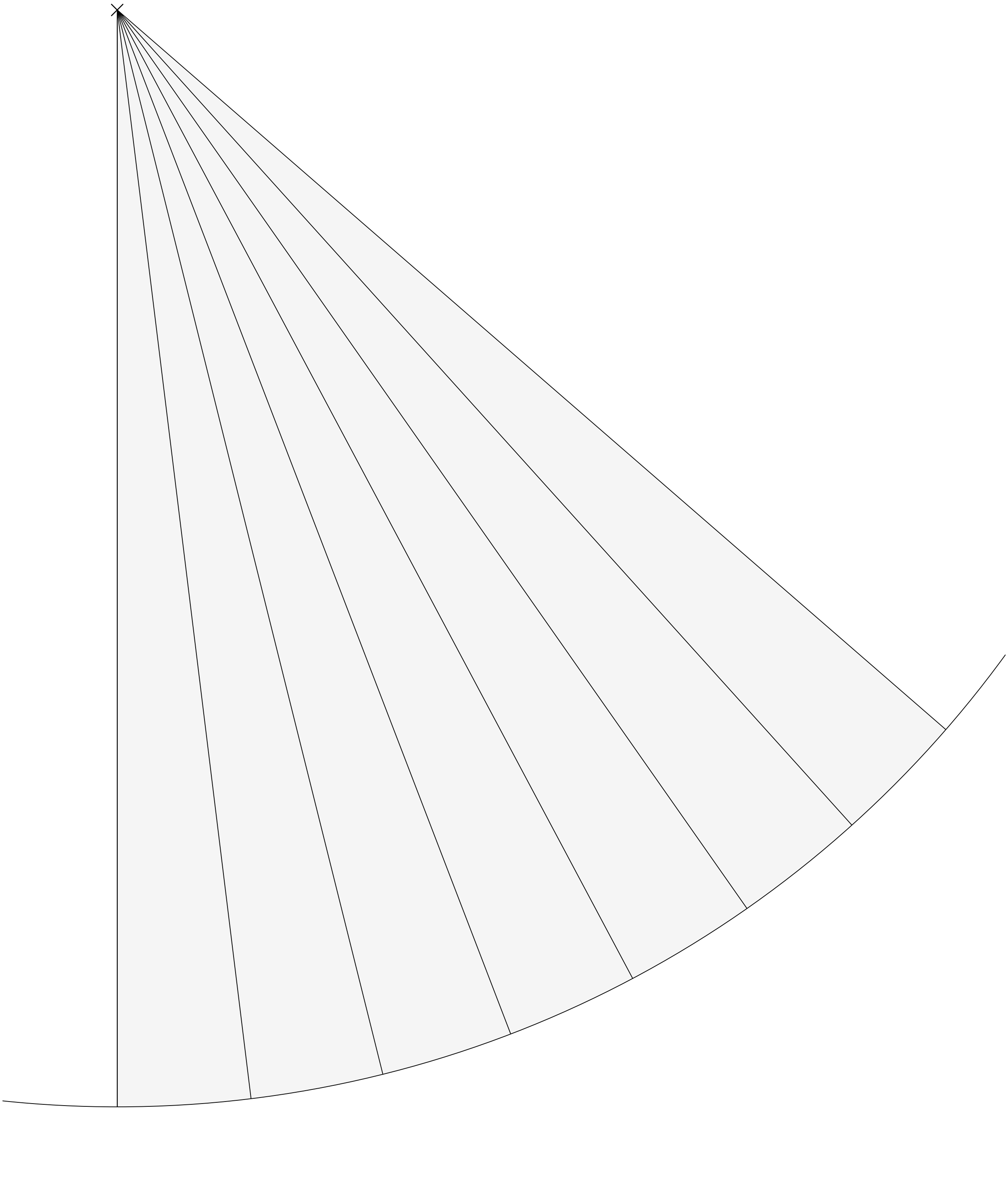
		π auf 5 Nachkommastellen ca.
Leibniz	$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$	140000 Summanden
Euler	$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$	360000
	$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + ...$	50
Madhava Indien, 14. Jh.	$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + ...\right)$	10
Ramanujan 1914	$\frac{1}{\pi} =$ Platz nicht ausreichend	1

John Machin 1706

$$\pi = 6\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$$

↑ π näherungsweise



Entnimm der Zeichnung alle Größen, um π näherungsweise bestimmen zu können.

$\alpha = 7°$
$r = 18\,cm$
$b \approx 2{,}2\,cm$

$$2\,\pi\,r \approx \frac{1}{7} \cdot 2{,}2 \cdot 360 \quad \Longrightarrow \quad \pi \approx 3{,}14$$

$$\pi = 3{,}141592653589793238462643$$

↑ Auf wie viele Stellen braucht man π ?

Berechne den Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = 1000$ (mm, m, km)
mit den angegebenen Näherungen.
Ermittle die Abweichungen auf 5 Dezimalen zur Berechnung mit Taschenrechnergenauigkeit.
(Dies sind dann auch die Abweichungen vom exakten Ergebnis.)
Formuliere das Ergebnis für p_3 und p_5 mit Einheiten.

	Näherung für π
p_2	3,14
p_3	3,142
p_4	3,1416
p_5	3,14159
p_6	3,141593

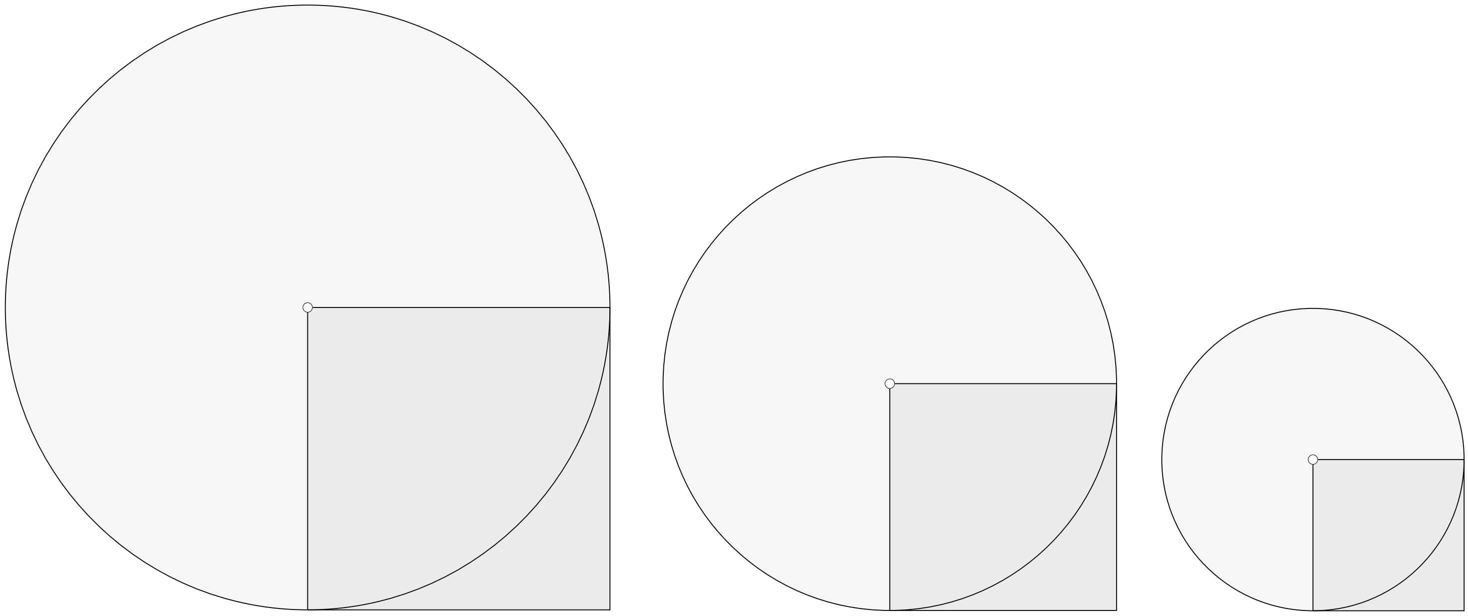
↑ Auf wie viele Stellen braucht man π?

Berechne den Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = 1000$ (mm, m, km)
mit den angegebenen Näherungen.
Ermittle die Abweichungen auf 5 Dezimalen zur Berechnung mit Taschenrechnergenauigkeit.
(Dies sind dann auch die Abweichungen vom exakten Ergebnis.)
Formuliere das Ergebnis für p_3 und p_5 mit Einheiten.

	Näherung für π
p_2	3,14
p_3	3,142
p_4	3,1416
p_5	3,14159
p_6	3,141593

	Näherung für π	Umfang (mm, m, km)	Abweichung (mm, m, km), absolut
p_2	3,14	6280	3,18531
p_3	3,142	6284	0,81469
p_4	3,1416	6283,2	0,01469
p_5	3,14159	6283,18	0,00531
p_6	3,141593	6283,186	0,00069

↑ Ähnlichkeit



Die Figuren sind ähnlich.
Der Inhalt eines Kreises ist jeweils ein stets gleiches Vielfaches q des Quadratinhalts.
Man stelle sich vor, die Figur wird doppelt (dreifach) so groß gezeichnet.

$$A_{\text{Kreis}} = A_{\text{Quadrat}} \cdot q$$

Das Entsprechende gilt für den Kreisumfang und den Radius.

↑ Iterative Berechnung

Mit der Formel (Seite 4) $\quad s_{2n}^2 = (\frac{s_n}{2})^2 + (r - \sqrt{r^2 - (\frac{s_n}{2})^2}\,)^2$, $r = 1$, $s_4 = \sqrt{2}$ (Quadratseite) ermitteln wir π auf 10 Nachkommastellen.

Tabellenkalkulation

	n-Eck	Seitenlänge s	Näherung für π
0	4	1,4142135624	
1	8	0,7653668647	
2	16	0,3901806440	
3	32	0,1960342807	
4	64	0,0981353487	3,1403311570 ...
5	128	0,0490824570	3,1412772509 ...
6	256	0,0245430766	3,1415138011 ...
7	512	0,0122717693	3,1415729404 ...
8	1024	0,0061359135	3,1415877253 ...
9	2048	0,0030679604	3,1415914215 ...
10	4096	0,0015339806	3,1415923456 ...
11	8192	0,0007669904	3,1415925766 ...
12	16384	0,0003834952	3,1415926343 ...
13	32768	0,0001917476	3,1415926488 ...
14	65536	0,0000958738	3,1415926524 ...
15	131072	0,0000479369	3,1415926533 ...
16	262144	0,0000239684	3,1415926535 ...

s ist mit n zu multiplizieren (Umfang, $U = \pi d$) und durch 2 zu dividieren.

mit dem GTR

1. $\sqrt{2}$ in **A** (z. B.) mit STO ▶ speichern.

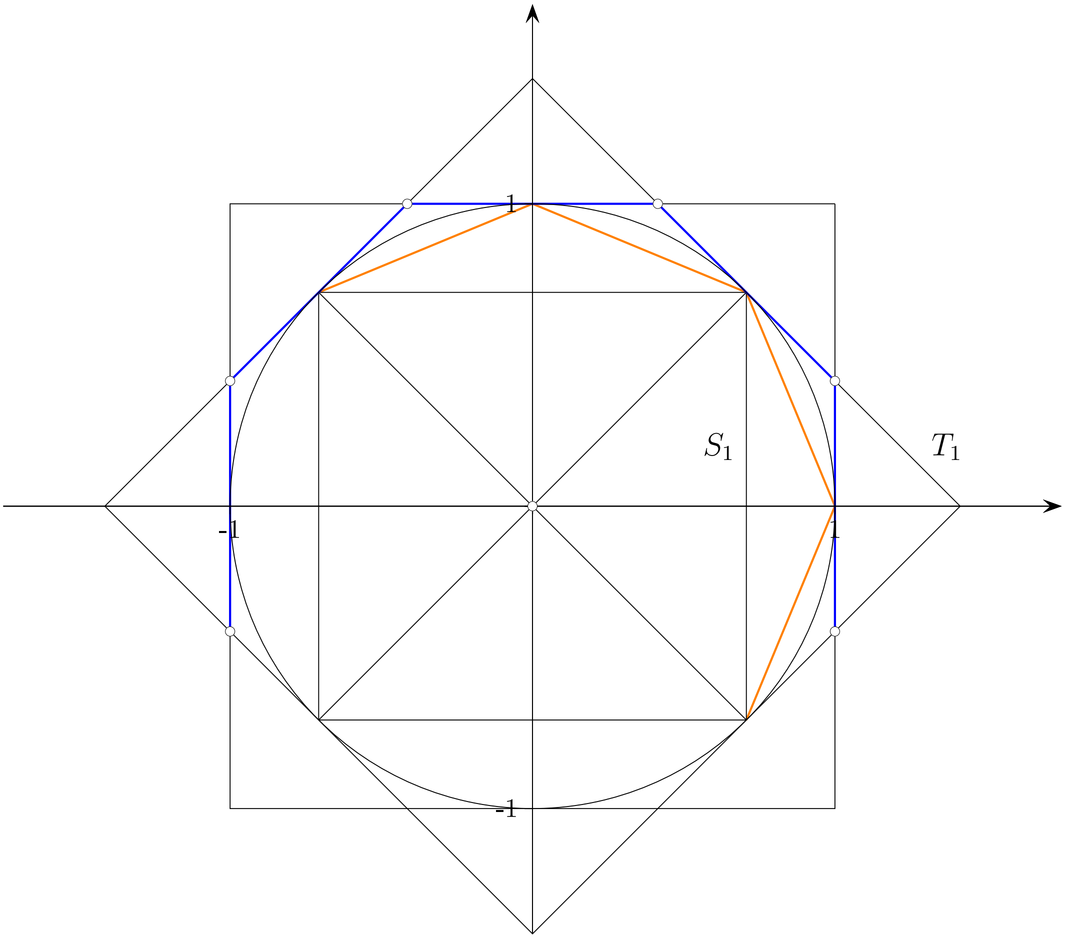
2. Eingabe Homebildschirm

$$\sqrt{\frac{\mathbf{A}^2}{4} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mathbf{A}^2}{4}}\right)^2} \to \mathbf{A} \qquad \text{mit STO ▶}$$

3. 16-mal ENTER

4. Ergebnis mit 262144 multiplizieren und durch 2 dividieren.

↑ Umfänge ein- (S_n) und umbeschriebener (T_n) Polygone



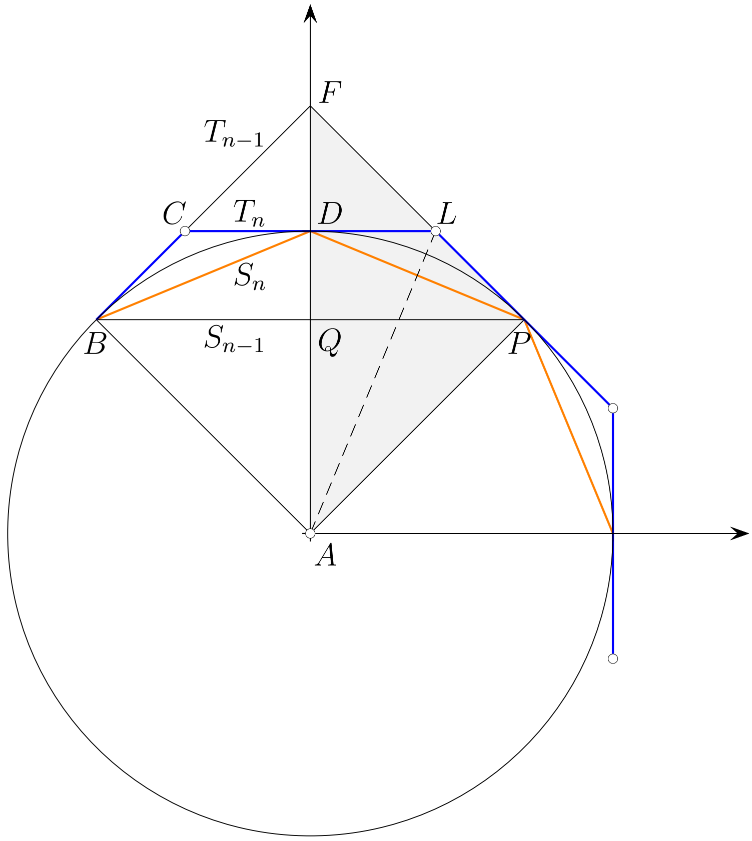
Für die Polygonumfänge existieren die Rekursionsformeln[1] $S_n = \sqrt{S_{n-1}T_n}$, $T_n = \frac{2S_{n-1}T_{n-1}}{S_{n-1}+T_{n-1}}$.

Anzahl Ecken	n	T_n außen	S_n innen	$S_n/2$
4	1	8	$4\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
8	2	6,62741700	6,12293492	3,06146746
16	3	6,36519576	6,24289030	3,12144515
32	4	6,30344981	6,27309698	3,13654849
64	5	6,28823677	6,28066231	3,14033116
128	6	6,28444726	6,28255450	3,14127725
256	7	6,28350074	6,28302760	3,14151380
512	8	6,28326416	6,28314588	3,14157294
1024	9	6,28320502	6,28317545	3,14158773
2048	10	6,28319024	6,28318284	3,14159142
4096	11	6,28318654	6,28318469	3,14159235
8192	12	6,28318562	6,28318515	3,14159258
16384	13	6,28318538	6,28318527	3,14159263
	…			

$\longrightarrow \quad 2\pi = 6{,}28318530\ldots, \qquad \pi = 3{,}14159265\ldots$

↑ [1] siehe Hischer

↑ Beweise



$$S_n = \sqrt{S_{n-1}T_n}$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{DL}}$$ | beachte den Wechselwinkel, ähnliche Dreiecke, mit z. B. 8 erweitern

$$\frac{2\,S_{n-1}}{S_n} = \frac{S_n}{T_n/2}$$

$$\Longrightarrow \text{Behauptung}$$

$$T_n = \frac{2S_{n-1}T_{n-1}}{S_{n-1}+T_{n-1}}$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CF}}$$

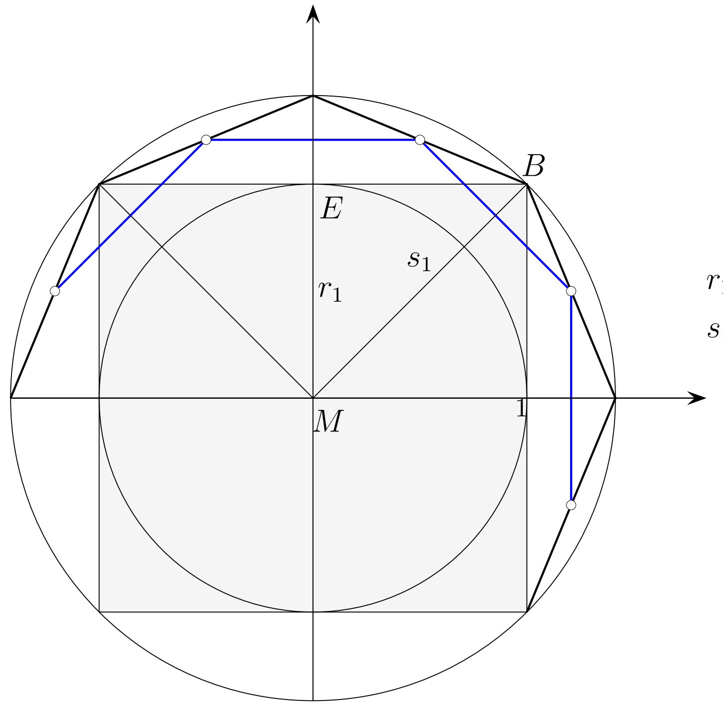
$$= \frac{\overline{CL}}{\overline{BF}-\overline{CD}}$$ | beachte den Wechselwinkel, ähnliche Dreiecke, mit z. B. 8 erweitern

$$\frac{2\,S_{n-1}}{T_{n-1}} = \frac{T_n}{T_{n-1}-T_n/2}$$

$$\Longrightarrow \text{Behauptung}$$

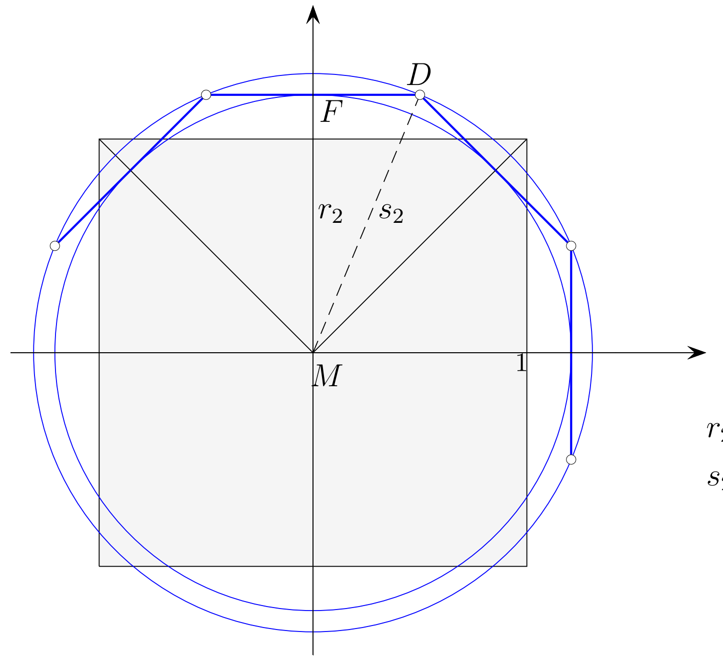
↑ π mit dem Verfahren von Cusanus

Der Kardinal und Gelehrte von Kues 1401-1464, lat. Cusanus, hatte eine ausgefallene Idee, π zu ermitteln. Mit einem Quadrat vom Umfang U (hier $U = 8$) beginnend werden schrittweise Vielecke mit gleichem Umfang erzeugt, die sich einem Kreis mit dem Radius r annähern.
Mit der Näherung r_n für r und $U = 2\pi r_n$ kann π ermittelt werden, $\pi = \frac{U}{2r_n}$.



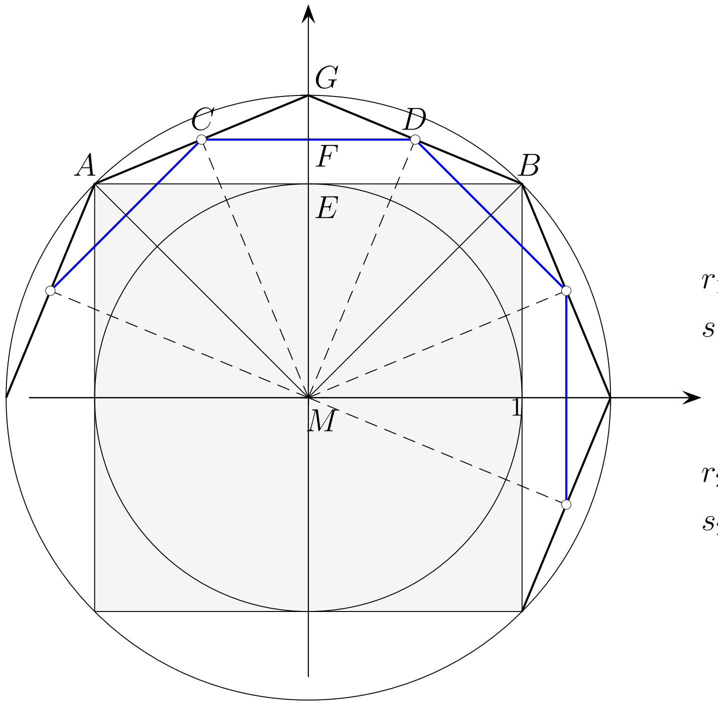
$r_1 = \overline{ME}$
$s_1 = \overline{MB}$

Für das Quadrat ist der Inkreisradius $r_1 = 1$ und der Umkreisradius $s_1 = \sqrt{2}$, es gilt
$2\pi r_1 < U < 2\pi s_1$.
Wir gehen nun zum blau gefärbten Vieleck über, das offensichtlich? den gleichen Umfang hat.
Für U ergibt das mit den In- und Umkreisradien die Abschätzung $2\pi r_2 < U < 2\pi s_2$.



$r_2 = \overline{MF}$
$s_2 = \overline{MD}$

Die Radien r_2 und s_2 lassen sich leicht aus r_1 und s_1 ermitteln.



$r_1 = \overline{ME}$

$s_1 = \overline{MB} = \overline{MG}$

$r_2 = \overline{MF}$

$s_2 = \overline{MD}$

Begründe $\quad \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

$r_2 = \frac{r_1+s_1}{2}$ $\qquad$ Fortsetzung des Verfahrens $\quad r_3 = \frac{r_2+s_2}{2}$

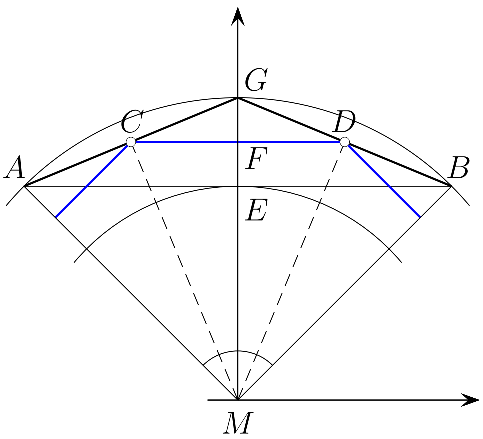
$s_2 = \sqrt{r_2 \cdot s_1}$ $\quad$ Kathetensatz $\qquad s_3 = \sqrt{r_3 \cdot s_2}$ $\quad$ usw.

$$2\pi r_n < U < 2\pi s_n \quad \Longrightarrow \quad (U=8) \quad 4/s_n < \pi < 4/r_n$$

Anzahl Ecken	n	r_n	s_n	$4/s_n$	$4/r_n$
4	1	1	$\sqrt{2}$	2,82842712	4,00000000
8	2	1,20710678	1,30656296	3,06146746	3,31370850
16	3	1,25683487	1,28145772	3,12144515	3,18259788
32	4	1,26914630	1,27528715	3,13654849	3,15172491
64	5	1,27221673	1,27375102	3,14033116	3,14411839
128	6	1,27298387	1,27336739	3,14127725	3,14222363
256	7	1,27317563	1,27327150	3,14151380	3,14175037
512	8	1,27322357	1,27324753	3,14157294	3,14163208
1024	9	1,27323555	1,27324154	3,14158773	3,14160251
2048	10	1,27323855	1,27324004	3,14159142	3,14159512
4096	11	1,27323930	1,27323967	3,14159235	3,14159327
8192	12	1,27323948	1,27323958	3,14159258	3,14159281
16384	13	1,27323953	1,27323955	3,14159263	3,14159269
32768	14	1,27323954	1,27323955	3,14159265	3,14159266
	...				

$\longrightarrow \quad \pi = 3,14159265\ldots$

$\uparrow$ π mit dem Verfahren von Cusanus



$r_n = \overline{ME}$
$s_n = \overline{MB} = \overline{MG}$

$r_{n+1} = \overline{MF}$
$s_{n+1} = \overline{MD}$

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \tfrac{1}{2}\,\overline{AB} \\ r_{n+1} &= \frac{r_n+s_n}{2} \\ s_{n+1} &= \sqrt{r_{n+1}\cdot s_n} \quad \text{Kathetensatz} \end{aligned}$$

Die Gesetzmäßigkeiten sind unabhängig vom Öffnungswinkel
des Kreissegments, da dieser in den Rechnungen nicht erscheint.

Vertiefung für den 11. Jg.

Mit geometrischer Anschauung ist evident, dass die Folge der Inkreisradien streng monoton wächst, die Folge der Umkreisradien streng monoton fällt und beide Folgen gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Dass mit $[r_n; s_n]$ eine Intervallschachtelung vorliegt, wird mit $s_{n+1}^2 - r_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\,(s_n^2 - r_n^2)$ gezeigt. Dies folgt durch Einsetzen aus den Rekursionsformeln.

$$\begin{aligned} s_2^2 - r_2^2 &= \tfrac{1}{4}\,(s_1^2 - r_1^2) = \tfrac{1}{4}\,(\sqrt{2}^2 - 1^2) = \tfrac{1}{4} \\ s_3^2 - r_3^2 &= \frac{1}{4^2} \\ s_4^2 - r_4^2 &= \frac{1}{4^3} \\ s_{10}^2 - r_{10}^2 &= \frac{1}{4^9} \\ (s_{10} - r_{10})(s_{10} + r_{10}) &= \frac{1}{4^9} \\ s_{10} - r_{10} &= \frac{1}{4^9(s_{10}+r_{10})} < \frac{1}{2\cdot 4^9} \\ 0 < s_n - r_n &< \frac{1}{2\cdot 4^{n-1}} \end{aligned}$$