Gleichungen höheren Grades $\quad x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$

Wie wir wissen, kann eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit einer Formel gelöst werden. Im 16. Jh. fanden Tartaglia und von ihm unabhängig del Ferro eine Lösungsformel für Gleichungen 3. Grades. Die Gleichung

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

kann durch Einsetzen von $x = y - \frac{r}{3}$ auf die Form

$$y^3 - 3p\,y - 2q = 0$$

gebracht werden. Eine Lösung lautet:

$$y_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Eine ähnlich komplizierte Formel entdeckte Ferrari für Gleichungen 4. Grades. 1824 konnte der norwegische Mathematiker Niels Hendrik Abel (1802-1829) beweisen, dass es für Gleichungen vom Grad $n \geq 5$ keine Lösungsformel geben kann. Evariste Galois (1811-1832) entwickelte eine allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen, die sich als außerordentlich fruchtbar erwies. Galois fiel in einem Duell.

Eine quadratische Gleichung wie $x^2 - x - 12 = 0$ kann, wenn die Lösungen $x_1 = -3$ und $x_2 = 4$ bekannt sind, auf die Form $(x+3)(x-4) = 0$ gebracht werden.

Die Gleichung $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$ könnte gelöst werden, wäre die Zerlegung des Polynoms $x^3 + x^2 - 10x + 8$ in Linearfaktoren $x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x-2)(x-1)(x+4)$ bekannt.
Wie erhalten wir aber diese Zerlegung?

Aus $x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x-2)(x-1)(x+4)$ ist zu erkennen, dass $x^3 + x^2 - 10x + 8$ durch $(x-2)$ geteilt werden kann:

$$\frac{x^3 + x^2 - 10x + 8}{x - 2} = (x-1)(x+4)$$

Wenn also die Gleichung $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$ vorliegt und eine Lösung z.B. $x_1 = 2$ bekannt ist, führen wir eine Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + x^2 - 10x + 8) : (x-2) = x^2 + 3x - 4 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\quad 3x^2 - 10x \\
\quad \underline{-(3x^2 - 6x)} \\
\qquad -4x + 8 \\
\qquad \underline{-(-4x + 8)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Es ist also:
$(x^3 + x^2 - 10x + 8) = (x-2) \cdot (x^2 + 3x - 4)$
Die restlichen Lösungen $x_2 = 1$ und $x_3 = -4$ ergeben sich durch Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 + 3x - 4 = 0$.
Nützlich für die gezielte Suche der 1. Lösung: Die (ganzzahligen) Lösungen teilen 8.

Zur weiteren Übung:

a) $x^3 + 5x^2 - 26x - 120 = 0, \quad x_1 = 5$

b) $2x^3 + 4x^2 - 58x + 84 = 0, \quad x_1 = 2$

c) $x^3 - 7x - 6 = 0$

d) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

Die (übrigen) Lösungen:

a) $x_2 = -6, \quad x_3 = -4$

b) $x_2 = 3, \quad x_3 = -7$

c) $x_1 = 3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1$

d) $x_{1/2} = \pm 2$ (biquadratisch, $x^2 = z$, $z_1 = 4$, $z_2 = -9$)