↑ Exponentialgleichungen und Logarithmen

1. Löse die Gleichungen:

   a) $2^x = 16$

   b) $3^{4x} = 9$

   Tipp: *Exponentialgleichungen* (die Variable x steht im Exponenten) lassen sich durch Zurückführen auf die gleiche Basis lösen.

2. Löse die Gleichung: $3^x = 2$.

   Die Zahlen 3 und 2 müssen zunächst mit einer gleichen Basis dargestellt werden, empfehlenswert ist 10.

   $3 = 10^{0{,}4771}$ und $2 = 10^{0{,}3010}$

   Die Exponenten von 10 werden mit dem Taschenrechner ermittelt, sie heißen *Logarithmen*.
   Sprechweise: Der Logarithmus von 3 ist 0,4771 .

   $\lg 3 = 0{,}4771$ und $\lg 2 = 0{,}3010$

   Mit dieser Schreibweise kann die Rechnung zu $3^x = 2$ vereinfacht werden.

   Merke: Der Logarithmus von negativen Zahlen existiert nicht, da z.B. $10^x = -3$ keine Lösung hat.

   Nützlich sind die *Logarithmenregeln:*

   a) $\lg ab = \lg a + \lg b$

   b) $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$

   c) $\lg a^n = n \cdot \lg a$ $\qquad a,\ b\ >\ 0$

   Mit der Logarithmenregel *c)* können in der Rechnung zu $3^x = 2$ noch 2 Zeilen eingespart werden.

3. Löse die Gleichungen:

   a) $4^x = 11$ b) $8^x = 5^{x+1}$

   c) $2^{6x+2} = 12$ d) $3 \cdot 7^{2x-3} = 16$

   e) $4 \cdot 9^{2x} = 6^x$ f) $3^{4x-1} = 2^x$

1. a)
$$\begin{aligned} 2^x &= 16 \\ 2^x &= 2^4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$
Die Seiten der 2. Zeile stimmen nur überein, wenn beide Exponenten gleich sind.

   b)
$$\begin{aligned} 3^{4x} &= 9 \\ 3^{4x} &= 3^2 \\ 4x &= 2 \quad |:4 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 3^x &= 2 \\ (10^{0{,}4771})^x &= 10^{0{,}3010} \quad \text{beachte:} \\ 10^{0{,}4771\cdot x} &= 10^{0{,}3010} \quad (a^m)^n = a^{mn} \\ 0{,}4771 \cdot x &= 0{,}3010 \\ x &= \frac{0{,}3010}{0{,}4771} \\ x &= 0{,}6309 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^x &= 2 \\ (10^{\lg 3})^x &= 10^{\lg 2} \\ 10^{\lg 3\cdot x} &= 10^{\lg 2} \\ \lg 3 \cdot x &= \lg 2 \\ x &= \frac{\lg 2}{\lg 3} \\ x &= 0{,}6309 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^x &= 2 \quad |\ \lg \\ x \cdot \lg 3 &= \lg 2 \\ x &= \frac{\lg 2}{\lg 3} \\ x &= 0{,}6309 \end{aligned}$$

3. a) $x = 1{,}7297$

   b)
$$\begin{aligned} 8^x &= 5^{x+1} \quad |\ \lg \\ x \cdot \lg 8 &= (x+1) \cdot \lg 5 \\ x \cdot \lg 8 &= x \cdot \lg 5 + \lg 5 \\ x \cdot (\lg 8 - \lg 5) &= \lg 5 \\ x &= \frac{\lg 5}{\lg 8 - \lg 5} \\ x &= 3{,}4243 \end{aligned}$$

   c) $x = 0{,}2642$ d) $x = 1{,}9301$

   e) $x = -0{,}5326$ f) $x = 0{,}2968$

↑ Logarithmen Ergänzung

Für Logarithmen wie z. B. $\lg 16$, d. h. der Lösung der Gleichung $10^x = 16$, können Näherungswerte ohne wesentlichen Einsatz des Taschenrechners ermittelt werden.

$10^x = 16$

Es ist zu erkennen, dass gilt: $1 < x < 2\,,$ da $10^1 = 10$ und $10^2 = 100$ ist.

x beginnt daher mit 1, ...

Um die nächste Ziffer y zu ermitteln, schreiben wir für $x = 1,y\ ...$ genauer $x = 1 + \frac{y}{10}$.

$$
\begin{aligned}
&& 10^x &= 16 \\
\Longleftrightarrow && 10^{\,1+\frac{y}{10}} &= 16 \\
\Longleftrightarrow && 10^1 \cdot 10^{\frac{y}{10}} &= 16 && |:\ 10 \\
\Longleftrightarrow && 10^{\frac{y}{10}} &= 1,6 && |\ (\ )^{10} \\
\Longleftrightarrow && 10^y &= 109{,}95
\end{aligned}
$$

Nun ist zu erkennen, dass gilt: $2 < y < 3\,,$ da $10^2 = 100$ und $10^3 = 1000$ ist.

Insgesamt erhalten wir: $x = 1{,}2\ldots$.

Finde auf diese Weise Näherungen für:

a) $\lg 1660$

b) $\lg 21$

c) $\lg 2$

Fleißige ermitteln 2 Stellen (nach dem Komma).

↑ Logarithmenregeln

Für natürliche Zahlen ist

$$10^n \cdot 10^m = 10^{n+m} \qquad \text{z.B.} \quad 10^3 \cdot 10^4 = 10^{3+4}$$

offensichtlich.
Nicht offensichtlich ist die Gültigkeit, falls n und m reelle Zahlen sind. Sie folgt jedoch aus einer Eigenschaft einer von Leonhard Euler (1707-1783) gefundenen Berechnungsformel für Potenzen. Zu ihrer Begründung sind Elemente der höheren Mathematik erforderlich, über die wir hier noch nicht verfügen.

Betrachten wir ein Zahlen-Beispiel:

$$\underbrace{10^{0,30103}}_{2} \cdot \underbrace{10^{0,47712}}_{3} = \underbrace{10^{0,77815}}_{6}$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\underbrace{10^{\lg 2}}_{2} \cdot \underbrace{10^{\lg 3}}_{3} = \underbrace{10^{\lg 6}}_{6}$$

Es gilt hier: $0{,}30103 + 0{,}47712 = 0{,}77815$ oder $\lg 2 + \lg 3 = \lg 6$

und allgemein ist $\lg a + \lg b = \lg ab$.

Wir erkennen, dass diese Logarithmenregel eine Beziehung zwischen Exponenten ist,
die $10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}$ auf reelle Zahlen verallgemeinert.

1. Veranschauliche an Zahlen-Beispielen die Beziehungen

   $a)$ $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$

   $b)$ $\lg a^n = n \cdot \lg a \qquad a,\ b > 0$

2. Löse die Exponentialgleichung: $4 \cdot 3^{2x} = 7$

   Die Anwendung der Logarithmenregeln zur Lösung der Gleichung (das Logarithmieren also) bedeutet, dass die Beziehung zwischen den Exponenten aufgeschrieben wird.

   Tipp: Schreibe statt $\lg 3\,2x$ *stets* $2x \lg 3$.
   Die Übersichtlichkeit wird erhöht, wenn die Faktoren vor dem Logarithmus stehen.

   Lösung: $x = 0{,}255$

↑ Logarithmenregeln

Offensichtlich ist $10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}$ z. B. $10^3 \cdot 10^4 = 10^{3+4}$

Betrachten wir $2 \cdot 3 = 6$ in Potenzschreibweise:

$$\underbrace{10^{0{,}30103}}_{2} \cdot \underbrace{10^{0{,}47712}}_{3} = \underbrace{10^{0{,}77815}}_{6}$$

oder kürzer:

$$\underbrace{10^{\lg 2}}_{2} \cdot \underbrace{10^{\lg 3}}_{3} = \underbrace{10^{\lg 6}}_{6}$$

Für die Exponenten, Logarithmen genannt, gilt:

$$0{,}30103 + 0{,}47712 = 0{,}77815 \qquad \text{oder} \qquad \lg 2 + \lg 3 = \lg 6$$

Allgemein: $\lg a + \lg b = \lg(ab)$

Wir erkennen, dass diese Logarithmenregel eine Beziehung zwischen Exponenten ist.

Der Übergang von $2 \cdot 3 = 6 \quad | \lg$
zu den Exponenten $0{,}30103 + 0{,}47712 = 0{,}77815$ oder besser $\lg 2 + \lg 3 = \lg 6$
heißt logarithmieren.

Weitere Logarithmenregeln, die sich aus dem Rechnen mit Potenzen ergeben:
$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$
$\lg a^n = n \cdot \lg a \qquad a,\ b > 0$

Löse die Exponentialgleichungen:

Tipp: Schreibe statt $\lg 3\, 2x$ *stets* $2x \lg 3$.
Die Übersichtlichkeit wird erhöht, wenn die Faktoren <u>vor</u> dem Logarithmus stehen.

1. $5^x = 100$
2. $3^{2x} = 20$
3. $8^x = 5 \cdot 2^x$
4. $4 \cdot 5^{x-1} = 3^x$

1.	$5^x = 100$	2,861
2.	$3^{2x} = 20$	1,363
3.	$8^x = 5 \cdot 2^x$	1,161
4.	$4 \cdot 5^{x-1} = 3^x$	0,437

↑ Didaktisches

Exponentialgleichungen können auch durch Anwenden der Potenzgesetze umgeformt werden.

$$\begin{aligned}
5^{4x} &= 8\cdot 3^{2x+1}\\
5^{4x} &= 8\cdot 3^{2x}\cdot 3\\
(5^4)^x &= 24\cdot (3^2)^x\\
\left(\frac{5^4}{3^2}\right)^x &= 24\\
a^x &= b\\
x &= \frac{\lg b}{\lg a}\\
x &= 0{,}749
\end{aligned}$$

Hierbei ist es nicht erforderlich, den Exponenten x als Logarithmus von b zur Basis a zu benennen.

Das erforderliche Vorwissen beschränkt sich auf:

$$\begin{aligned}
10^x &= b\\
x &= \lg b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^x &= b\\
\left(10^{\lg a}\right)^x &= b\\
10^{x\lg a} &= 10^{\lg b}\\
x\lg a &= \lg b\\
x &= \frac{\lg b}{\lg a}
\end{aligned}$$

oder direkt:

$$\begin{aligned}
10^{x\lg a} &= b\\
x\lg a &= \lg b\\
x &= \frac{\lg b}{\lg a}
\end{aligned}$$

Die in Schulbüchern zu findenden Aufgaben wie:

Bestimme

a) $\log_4 0{,}0625\,;\qquad \log_a \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\,;\qquad$ usw.

erscheinen mir gänzlich überflüssig.
Die hierfür benötigte Zeit sollte mit Sinnvollerem zugebracht werden.

Im KC Ni 2015 wird das Lösen dieser Aufgaben jedoch verlangt.

↑ Was sind Logarithmen?

Wir betrachten den Bereich positiver Zahlen $\mathbb{R}^{>0}$.

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{2}$	1	2	5	10	16	160	1000

Jede positive Zahl kann als Potenz von 2 (von 10) dargestellt werden.
Einige Exponenten sind ohne Mühe zu ermitteln.

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{2}$	1	2	5	10	16	160	1000
$2^{-6{,}6439}$	2^{-1}	2^0	2^1	$2^{2{,}3219}$	$2^{3{,}3219}$	2^4	$2^{7{,}3219}$	$2^{9{,}9658}$

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{2}$	1	2	5	10	16	160	1000
10^{-2}	$10^{-0{,}3010}$	10^0	$10^{0{,}3010}$	$10^{0{,}6990}$	10^1	$10^{1{,}2041}$	$10^{2{,}2041}$	10^3

Als Basis wäre jede andere positive Zahl geeignet.

Die Exponenten heißen Logarithmen zur jeweiligen Basis.

Eine Multiplikation kann durch Addition der Exponenten ausgeführt werden.

Die Logarithmenregeln ergeben sich unmittelbar aus den Potenzgesetzen.

$$\underbrace{10^{0{,}3010}}_{2} \cdot \underbrace{10^{0{,}6990}}_{5} = 10^1$$

oder in anderer Schreibweise: $$\underbrace{10^{\lg 2}}_{2} \cdot \underbrace{10^{\lg 5}}_{5} = \underbrace{10^{\lg 10}}_{10}$$

Es gilt hier: $0{,}3010 + 0{,}6990 = 1$ oder $\lg(2 \cdot 5) = \lg 2 + \lg 5$

und allgemein: $\lg ab = \lg a + \lg b$

Beachte auf der linken Seite das Produkt ab, für eine Summe $a + b$ gibt es keine Regel.

Der Übergang zu den Exponenten heißt logarithmieren.

Ermittle begründet $\lg -2$.

Vorüberlegung

$$\begin{aligned} 3^{4x} &= 9 \\ 3^{4x} &= 3^2 \\ 4x &= 2 \quad |:4 \\ x &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 3^{4x} &= 9 \\ (3^2)^{2x} &= 9 \\ 9^{2x} &= 9 \\ 2x &= 1 \\ x &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Idee für das Lösen von Exponentialgleichungen:

Beide Seiten sind mit derselben Basis darzustellen.

$$\begin{aligned} 4^x &= 100 \\ (10^{\lg 4})^x &= 10^2 \\ 10^{x\cdot\lg 4} &= 10^2 \\ x\cdot\lg 4 &= 2 \\ x &= \frac{2}{\lg 4} \\ x &= 3{,}322 \end{aligned}$$

$10^{\lg 4} = 4$, $\quad \lg 4 = 0{,}6021$ heißt Logarithmus

$$\begin{aligned} 3^x &= 2 \\ (10^{\lg 3})^x &= 10^{\lg 2} \\ 10^{x\cdot\lg 3} &= 10^{\lg 2} \\ x\cdot\lg 3 &= \lg 2 \\ x &= \frac{\lg 2}{\lg 3} \\ x &= 0{,}6309 \end{aligned}$$

$10^{\lg 3} = 3$, $\quad 10^{\lg 2} = 2$

Und allgemein:

$$\begin{aligned} a^x &= b \qquad a, b > 0 \\ x &= \frac{\lg b}{\lg a} \end{aligned}$$

a) $5^x = 0{,}1$

b) $4^x = 20$

c) $3^x = 50$

d) $2^{4x} = 60$

e) $7^x = 12 \cdot 6^x$ Tipp: Bringe die Gleichung auf die Form: $a^x = b$

↑ Exponentialgleichungen

a) $5^x = 0{,}1$ $\qquad x = -1{,}431$

b) $4^x = 20$ $\qquad x = 2{,}161$

c) $3^x = 50$ $\qquad x = 3{,}561$

d) $2^{4x} = 60$ $\qquad x = 1{,}477$

e) $7^x = 12 \cdot 6^x$ $\qquad$ Tipp: Bringe die Gleichung auf die Form: $a^x = b$ $\qquad \left(\frac{7}{6}\right)^x = 12$ $\qquad x = 16{,}120$

↑ Überblick

$$a = b^n$$

$x = 2^3$	Potenzrechnung
$8 = x^3$	Wurzelrechnung
$8 = 2^x$	Logarithmenrechnung