Exponentialfunktionen

1. Eine Lotosblume bedeckt zum jetzigen Zeitpunkt eine Teichfläche von 0,3 m^2.
   Die bedeckte Teichfläche verdoppelt sich von Monat zu Monat.
   Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) beträgt die bedeckte Teichfläche 8 m^2?

   Kann das Wachstum durch eine Funktion der Art $y = k \cdot a^x$ beschrieben werden (k positiv, $a > 1$), so spricht man von einem exponentiellen Wachstum.

2. Die Anzahl der Bakterien in einer Bakterienkultur verdopple sich alle 4 Stunden.
   Zu Beginn der Beobachtung seien 300 Bakterien vorhanden.
   a) Erläutere, dass das Wachstum der Bakterienkultur durch $y = 300 \cdot 2^{\frac{x}{4}}$ beschrieben wird.
   b) Wie viele Bakterien beinhaltet die Kultur 10 Stunden nach Beginn (vor Beginn) der Beobachtung?
   c) Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) sind 10000 Bakterien vorhanden?

3. Die Temperatur eines $285°C$ heißen Körpers halbiert sich stündlich.
   a) Stelle eine Funktion auf, die den Abkühlungsvorgang beschreibt.
   b) Stelle den Abkühlungsvorgang grafisch dar.
   c) Welche Temperatur hat der Körper 5 Stunden nach Beginn des Abkühlungsvorganges?
   d) Nach welcher Zeit beträgt die Temperatur des Körpers $1°C$?

   Kann die Abnahme einer Größe durch eine Funktion der Art $y = k \cdot a^x$ beschrieben werden (k positiv, $0 < a < 1$), so spricht man von einer exponentiellen Abnahme.

4. Auf dem Graphen der Funktion $y = k \cdot a^x$ liegen die Punkte $A(6 \mid 874{,}8)$ und $B(10 \mid 70858{,}8)$.
   Bestimme die Konstanten a und k.

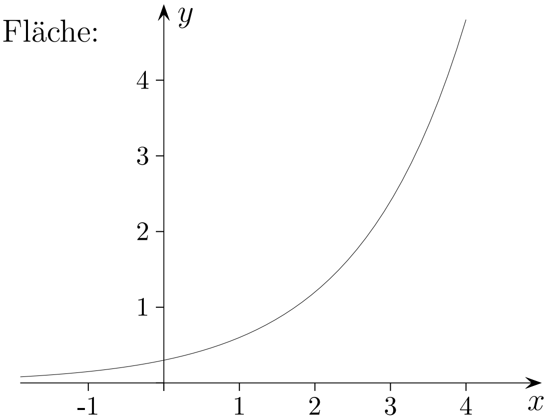
Exponentialfunktionen

1. Eine Lotosblume bedeckt zum jetzigen Zeitpunkt eine Teichfläche von 0,3 m^2.
   Die bedeckte Teichfläche verdoppelt sich von Monat zu Monat.
   Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) beträgt die bedeckte Teichfläche 8 m^2?

Wir ermitteln den Zusammenhang von der verstrichenen Zeit und der Größe der bedeckten Fläche:

Zeit x	*bedeckte Fläche* y *(in* m^2*)*
0	0,3
1	$0{,}3 \cdot 2$
2	$0{,}3 \cdot 2^2$
3	$0{,}3 \cdot 2^3$

Also gilt: $y = 0{,}3 \cdot 2^x$



$x = -1$ bedeutet einen Monat vor dem Beobachtungsbeginn.

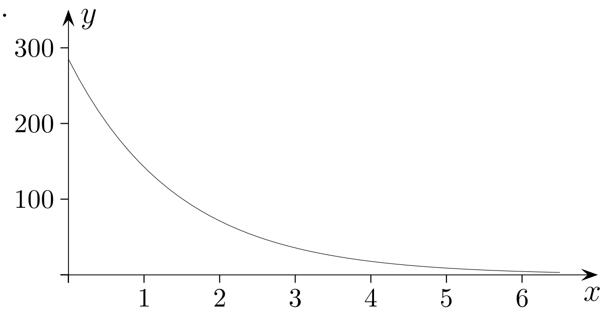
$$\begin{aligned} 0{,}3 \cdot 2^x &= 8 \\ x &= 4{,}74 \end{aligned}$$

2. Die Anzahl der Bakterien in einer Bakterienkultur verdopple sich alle 4 Stunden.
   Zu Beginn der Beobachtung seien 300 Bakterien vorhanden.

   a) Erläutere, dass das Wachstum der Bakterienkultur durch $y = 300 \cdot 2^{\frac{x}{4}}$ beschrieben wird.
   b) Wie viele Bakterien beinhaltet die Kultur 10 Stunden nach Beginn (vor Beginn) der Beobachtung? 1697 (53)
   c) Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) sind 10000 Bakterien vorhanden? 20,24

3. Die Temperatur eines 285°C heißen Körpers halbiert sich stündlich.

   a) Stelle eine Funktion auf, die den Abkühlungsvorgang beschreibt. $y = 285 \cdot (\frac{1}{2})^x$
   b) Stelle den Abkühlungsvorgang grafisch dar.

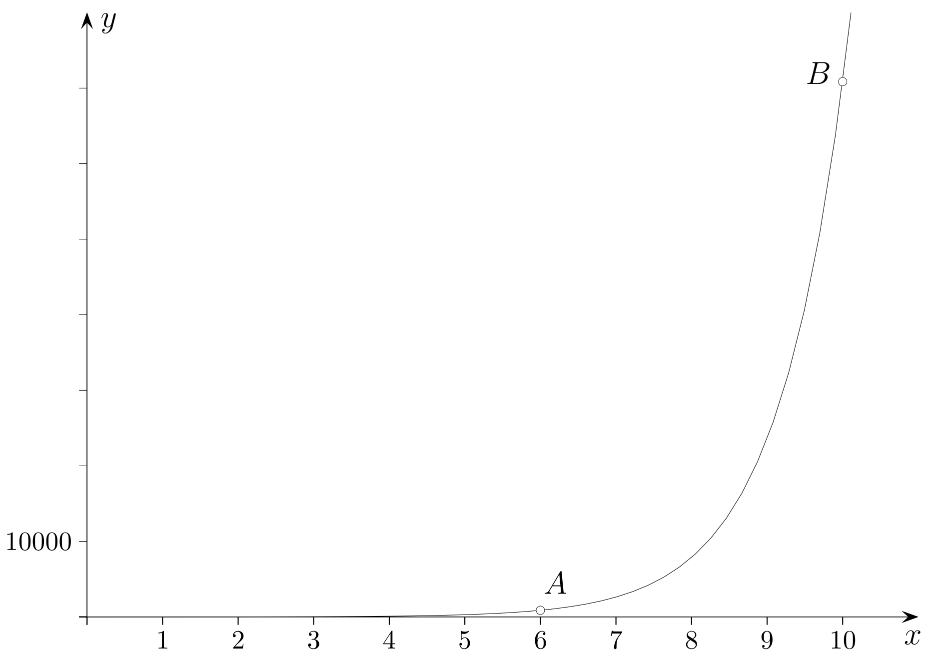


   c) Welche Temperatur hat der Körper 5 Stunden nach Beginn des Abkühlungsvorganges? 8,9°C
   d) Nach welcher Zeit beträgt die Temperatur des Körpers 1°C? 8,2

4. Auf dem Graphen der Funktion $y = k \cdot a^x$ liegen die Punkte $A(6 \mid 874{,}8)$ und $B(10 \mid 70858{,}8)$.

   Bestimme die Konstanten a und k.

$$
\begin{aligned}
70858{,}8 &= k \cdot a^{10} \\
874{,}8 &= k \cdot a^{6} \\
\frac{70858{,}8}{874{,}8} &= a^4 \\
81 &= a^4 \\
a &= 3 \\
k &= 1{,}2
\end{aligned}
$$



Graphen der Exponentialfunktionen (ohne GTR)

1. a) Zeichne die Graphen von $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 2^{-x}$.
   b) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Funktionen?

2. Skizziere den Graph und erläutere den Verlauf.

   a) $f(x) = 2^x + 1$

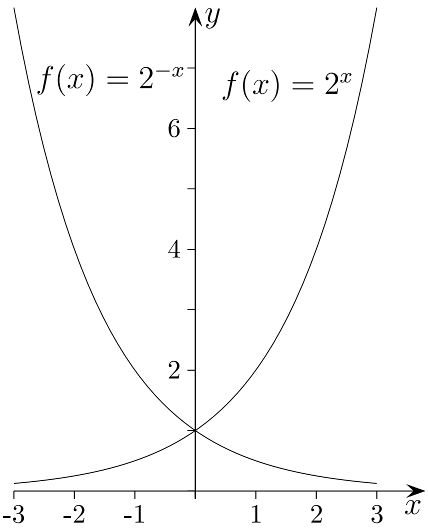
   b) $f(x) = -2^x$

   c) $f(x) = -2^{-x}$

   d) $f(x) = 3 - 2^{-x}$

Graphen der Exponentialfunktionen (ohne GTR)

1. a) Zeichne die Graphen von $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 2^{-x}$.
   b) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Funktionen?

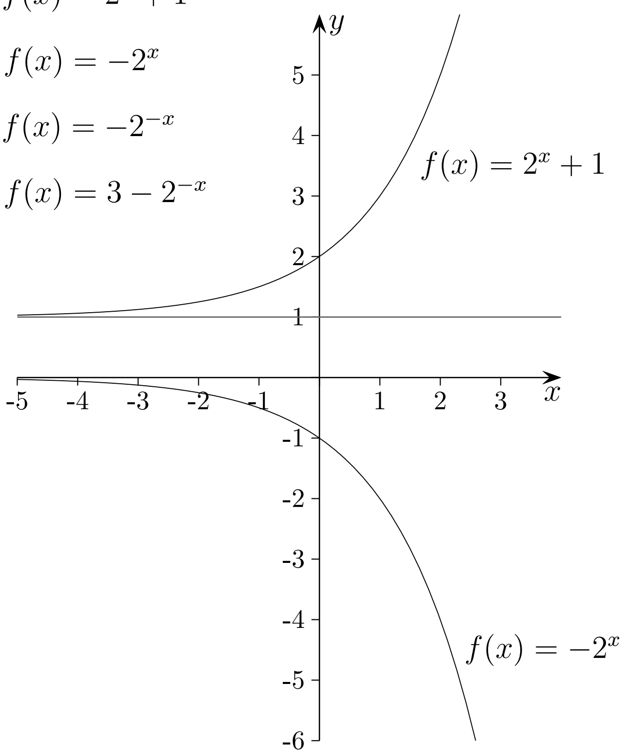


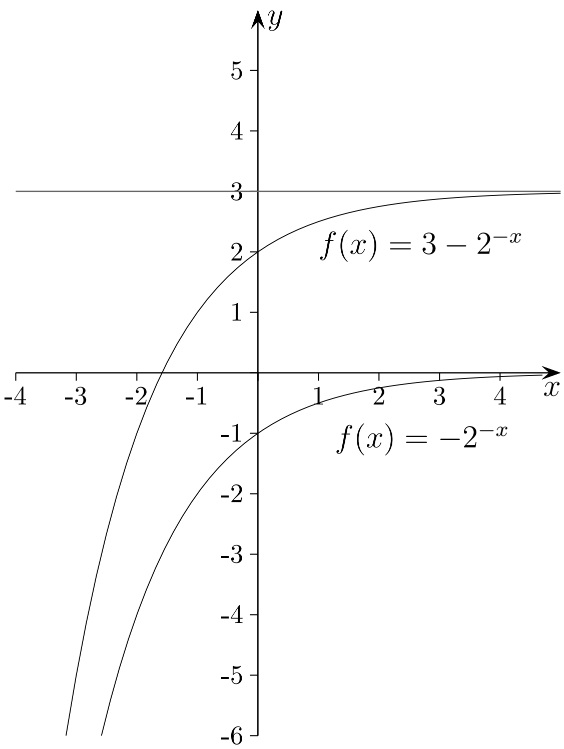
a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	1	2^1	2^2	2^3
2^{-x}	2^3	2^2	2^1	1	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}

b) *Die Graphen gehen durch Spiegelung an der y-Achse auseinander hervor.*
Der Graph von $f(x) = 2^x$ stellt ein exponentielles Wachstum dar,
der Graph von $f(x) = 2^{-x}$ wegen $2^{-x} = (2^{-1})^x = (\frac{1}{2})^x$ einen exponentiellen Zerfall.

2. Skizziere den Graph und erläutere den Verlauf.
   a) $f(x) = 2^x + 1$
   b) $f(x) = -2^x$
   c) $f(x) = -2^{-x}$
   d) $f(x) = 3 - 2^{-x}$





Die Spiegelung des Graphen von $f(x) = 2^x$ an der x-Achse ergibt den Graphen von $f(x) = -2^x$.
$f(x) = 3 - 2^{-x}$ ist die Funktion eines beschränkten Wachstums mit der Grenze $G = 3$.

Exponentielles Wachstum, exponentielle Abnahme (exponentieller Zerfall)

1. Wie lautet die Zinseszinsformel?

Welche Funktion $f(x) = \ldots$ (Zeit x) erfasst die Veränderung eines Bestands (Anfangsbestand stets a) für

2. eine Verdopplung des Bestands pro Zeiteinheit,
3. eine Verdopplung in jeweils 3 Zeiteinheiten,
4. eine Halbierung pro Zeiteinheit,
5. eine Halbierung in jeweils 3 Zeiteinheiten (Halbwertszeit beträgt 3 Zeiteinheiten),
6. einen 15 %-igen Zuwachs pro Zeiteinheit,
7. eine 15 %-ige Abnahme pro Zeiteinheit (einen 15 %-igen Zerfall),
8. einen 15 %-igen Zuwachs in jeweils 3 Zeiteinheiten,
9. einen Zuwachs um ein Drittel des jeweiligen Bestands pro Zeiteinheit,
10. eine Abnahme um ein Zwölftel des jeweiligen Bestands pro Zeiteinheit?

Exponentielles Wachstum, exponentielle Abnahme (exponentieller Zerfall)

1. $K_n = K_0 \cdot q^n$ — Zinseszinsformel, $q = 1 + \frac{p}{100}$
2. $f(x) = a \cdot 2^x$ — Verdopplung des Bestands pro Zeiteinheit, Anfangsbestand a
3. $f(x) = a \cdot 2^{\frac{x}{3}}$ — Verdopplung in jeweils 3 Zeiteinheiten,
Verdopplungszeit beträgt 3 Zeiteinheiten
4. $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — Halbierung des Bestands pro Zeiteinheit
5. $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$ — Halbierung in jeweils 3 Zeiteinheiten,
Halbwertszeit beträgt 3 Zeiteinheiten
6. $f(x) = a \cdot 1{,}15^x$ — $1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$, 15 %-iger Zuwachs pro Zeiteinheit
7. $f(x) = a \cdot 0{,}85^x$ — $1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$, 15 %-ige Abnahme pro Zeiteinheit, 15 %-iger Zerfall
8. $f(x) = a \cdot 1{,}15^{\frac{x}{3}}$ — 15 %-iger Zuwachs in jeweils 3 Zeiteinheiten
9. $f(x) = a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x$ — $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, Zunahme um $\frac{1}{3}$ des Bestands pro Zeiteinheit
10. $f(x) = a \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^x$ — $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$, Abnahme um $\frac{1}{12}$ des Bestands pro Zeiteinheit

Um z. B. für $f(x) = a \cdot 2^{\frac{x}{3}}$ oder $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$

die jährliche Zuwachs- bzw. Abnahmerate (Zeit x in Jahren) zu ermitteln,
ist die Funktion auf die Form $f(x) = a \cdot b^x$ zu bringen.

$$f(x) = a \cdot 2^{\frac{x}{3}} = a \cdot \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^x = a \cdot 1{,}260^x \qquad \text{jährliche Zunahme um } 26{,}0\,\%$$

$$f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}} = a \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^x = a \cdot 0{,}794^x \qquad \text{jährliche Abnahme um } 20{,}6\,\%$$

Etwas einfacher kann der Bestand nach einem Jahr ermittelt werden und dann
der prozentuale Zuwachs bezüglich des Anfangsbestandes.

Wie geht der Graph von $g(x) = 2^{x+3} + 4$ aus dem Graphen von $f(x) = 2^x$ hervor?