Bruchgleichungen

1. $$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{6}{x^2-9} \qquad | \cdot (x^2-9)$$

$$\begin{aligned} x-3 + x+3 &= 6 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$L = \{\ \}$$

beachte: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

Division durch null ist nicht möglich.

Lösungsidee:
Mit dem Hauptnenner multiplizieren.

Eine Probe ist unbedingt erforderlich, wie an dem folgenden Beispiel zu sehen ist:

$$\begin{aligned} 2x &= 6 \quad | \cdot x \\ 2x^2 &= 6x \end{aligned}$$

(Die Multiplikation mit x ist hier natürlich unsinnig, es soll an diesem Beispiel lediglich gezeigt werden, was passieren kann, wenn mit Ausdrücken, die x enthalten, multipliziert wird.)
Die erste Gleichung hat nur 3 als Lösung,
die zweite Gleichung hat zwei Lösungen: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$.

Durch das Multiplizieren mit Ausdrücken, die x enthalten, können scheinbare Lösungen entstehen. Die echten Lösungen müssen durch eine Probe herausgefiltert werden.

2. $1 + \frac{6}{x-2} = 2 + \frac{3x}{x-2}$

3. $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-4} = 1$

4. $2 - \frac{1}{x-4} = x$

Lösungen:
2. $x = 2$, $L = \{\ \}$
3. $L = \{3;\ 6\}$
4. $L = \{3\}$

Wurzelgleichungen

1. $$\begin{aligned} x + \sqrt{2x-3} &= 3 \\ \sqrt{2x-3} &= 3 - x \qquad | \ (\ )^2 \\ 2x - 3 &= 9 - 6x + x^2 \\ 0 &= x^2 - 8x + 12 \\ x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{16-12} \\ &= 4 \pm 2 \end{aligned}$$

$$x_1 = 6\ ;\quad x_2 = 2$$

$$L = \{2\}$$

Lösungsidee:
So umformen, dass die Wurzel alleine auf einer Seite steht, dann quadrieren.

Eine Probe ist unbedingt erforderlich, wie an dem folgenden Beispiel zu sehen ist:

$$\begin{aligned} x &= 2 \quad | \ (\ )^2 \\ x^2 &= 4 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung hat nur 2 als Lösung,
die zweite Gleichung hat zwei Lösungen: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Durch das Quadrieren können scheinbare Lösungen entstehen. Die echten Lösungen müssen durch eine Probe herausgefiltert werden.

2. $3 + \sqrt{6x+1} = 2x$

3. $x - \sqrt{6-2x} = -9$

4. $3x + \sqrt{4x+9} = -5$

Lösungen:
2. $L = \{4\}$
3. $L = \{-5\}$
4. $L = \{-2\}$