

BESONDERE PRÜFUNG 2019

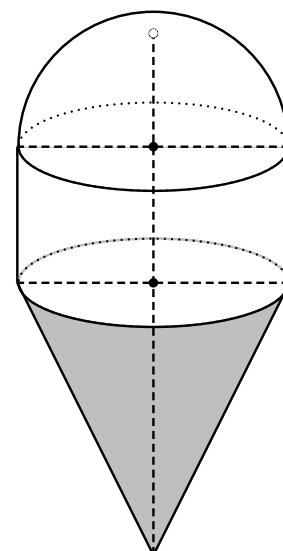
MATHEMATIK

Arbeitszeit: 120 Minuten

<hr style="width: 80%; margin: auto;"/> Name des Prüflings
--

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

BE	
1.	<p>Eine Boje hat folgende idealisierte Form: Ein Zylinder mit Grundkreisradius r und Höhe r trägt am einen Ende eine Halbkugel und am anderen Ende einen Kegel, jeweils mit dem gleichen Grundkreisradius r. Der Kegel ist doppelt so hoch wie der Zylinder. Die nebenstehende Skizze der Boje ist nicht maßstabsgetreu.</p>
4	<p>a) Bestimmen Sie einen Term für das Volumen der Boje in Abhängigkeit von r und fassen Sie den Term so weit wie möglich zusammen.</p>
6	<p>b) Die Boje ist – bis auf den unteren kegelförmigen Teil – mit einer fluoreszierenden Farbe bestrichen. Diese bestrichene Fläche hat einen Inhalt von 90 dm^2. Berechnen Sie r, sowie, auf cm gerundet, die Gesamthöhe der Boje.</p> <p style="text-align: right; margin-right: 10%;">(Zur Kontrolle: $r \approx 27 \text{ cm}$)</p>
2.	<p>Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 4,5x^2$.</p>
3	<p>a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.</p>
4	<p>b) Geben Sie das Verhalten von f für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$ an. Bestimmen Sie auch den Funktionswert von f an der Stelle $1,5$ und skizzieren Sie den Graphen von f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.</p>
6	<p>3. Gegeben sind die in \mathbb{R} definierten Funktionen $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$. Geben Sie alle Möglichkeiten für die Zahl der Nullstellen (mit Vielfachheit) an, die eine derartige Funktion haben kann. Skizzieren Sie grob zu jeder dieser Möglichkeiten ein Beispiel eines passenden Funktionsgraphen.</p>

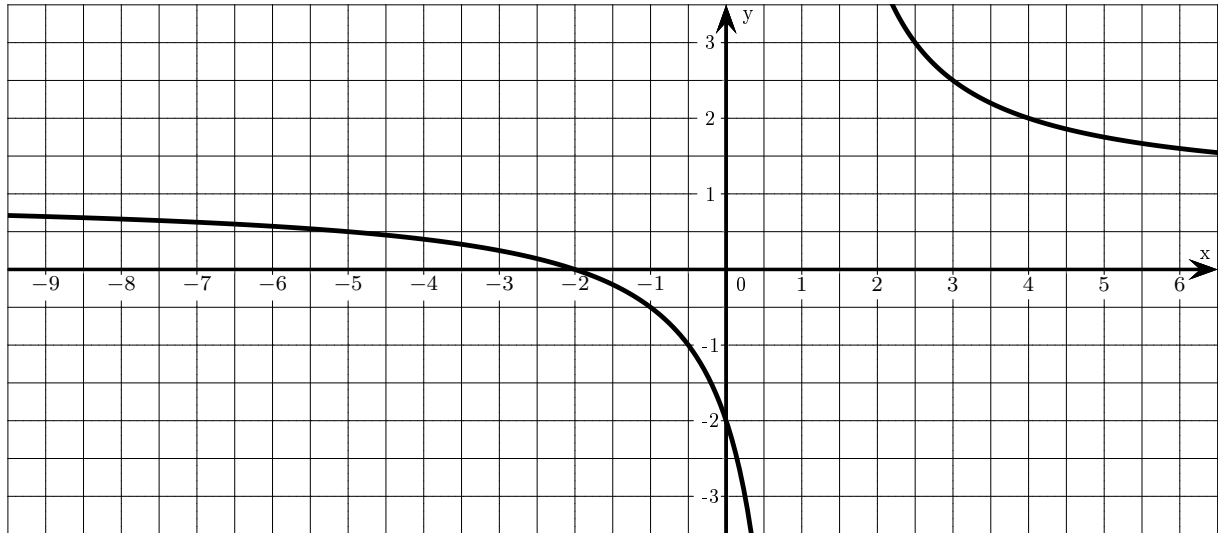


(Fortsetzung nächste Seite)

BE

4. Abgebildet ist der Graph der in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definierten Funktion $f : x \mapsto \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$.

- 4 a) Bestimmen Sie graphisch zwei Lösungen der Gleichung $\frac{x+2}{x-1} = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$. Ergänzen Sie hierzu die nachstehende Abbildung geeignet.



- 2 b) Begründen Sie, warum es für $x > 1$ keine Lösungen der Gleichung aus Teilaufgabe a) gibt.

5. Am 1. Januar 2002 hatte die Streaming-Plattform „Musicdream“ schon eine beachtliche Anzahl an Abonnenten. In den folgenden Jahren ist sie noch weiter gewachsen. Das Unternehmen kann rückblickend feststellen, dass sich die Anzahl seiner Abonnenten in Millionen modellhaft durch den Term $A_M(t) = 15 \cdot 1,4^t$ beschreiben lässt, wobei t die Anzahl der seit dem 1. Januar 2002 vergangenen Jahre angibt.

- 2 a) Geben Sie die Bedeutung der im Term enthaltenen Zahlen 15 und 1,4 im Sachzusammenhang an.
- 3 b) Bestimmen Sie anhand des Modells rechnerisch, nach wie vielen ganzen Jahren sich die Anzahl der Abonnenten seit 2002 erstmals mindestens verzehnfacht hat.

Beim ehemaligen Branchenführer „Supermusic“ ist die Anzahl der Abonnenten vom Jahr 2002 bis zum Jahr 2018 von 120 auf 50 Millionen gefallen. Dieses Unternehmen kann rückblickend feststellen, dass sich die Anzahl $A_S(t)$ seiner Abonnenten in Millionen modellhaft durch eine exponentielle Abnahme beschreiben lässt, wobei t wieder die Anzahl der seit dem 1. Januar 2002 vergangenen Jahre angibt.

- 3 c) Bestimmen Sie den Term $A_S(t)$. (Zur Kontrolle: $120 \cdot 0,95^t$)
- 4 d) Berechnen Sie, zu Beginn welchen Jahres „Musicdream“ zum ersten Mal der Marktführer war, also mehr Abonnenten hatte als „Supermusic“.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
5	6. a) Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f : x \mapsto -2 \cdot \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1$. Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion f schrittweise aus dem Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion $g : x \mapsto \sin(x)$ hervorgeht.
3	b) Geben Sie in der Form $h(x) = \sin(bx)$, $b \in \mathbb{R}$ den Funktionsterm einer in \mathbb{R} definierten Funktion h an, sodass alle ganzen Zahlen – und nur diese – Nullstellen dieser Funktion sind. Geben Sie auch die Periode dieser Funktion an.
	7. Im Kampf gegen den Buchsbaumzünsler, einen Schädling, der den Buchsbaumbestand bedroht, ist bereits seit einer Saison das neue Mittel „Zünselix“ auf dem Markt, das mit „biologischer Verträglichkeit und hoher Wirksamkeit“ beworben wird. Eine große, auf Buchs spezialisierte Gärtnerei hat auf ihren befallenen Sträuchern die Wirksamkeit von „Zünselix“ im Vergleich zum bisher verwendeten Mittel getestet. 30 % der befallenen Sträucher wurden mit „Zünselix“, der Rest mit dem bisherigen Mittel behandelt. Von den mit „Zünselix“ behandelten Sträuchern sind jetzt 78 % schädlingsfrei, 21 % aller behandelten Sträucher wurden mit dem alten Mittel behandelt und sind jetzt schädlingsfrei. Es wird ein behandelter Strauch zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse: Z : „Der Strauch wurde mit dem neuen Mittel Zünselix behandelt.“ F : „Der Strauch ist jetzt schädlingsfrei.“
4	a) Erstellen Sie zu dieser Situation ein vollständiges Baumdiagramm und tragen Sie an allen Ästen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ein. Unterscheiden Sie in der ersten Stufe des Baumdiagramms die Ereignisse Z und \bar{Z} .
3	b) Ein zufällig ausgewählter behandelter Strauch ist jetzt schädlingsfrei. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mit „Zünselix“ behandelt wurde.
4	c) Von 20 Sträuchern wurden vier mit „Zünselix“ behandelt. Aus diesen 20 Sträuchern werden drei zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei dieser Sträucher mit „Zünselix“ behandelt wurden.
60	