

Umkehrfunktion

Der Zusammenhang von Geschwindigkeit und Bremsweg wird näherungsweise durch eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2$ erfasst, wobei a experimentell ermittelt werden muss.

Beispiel: $a = \frac{1}{100}$

x	50	100	150
$f(x)$	25	100	225

Für die Rekonstruktion von Unfällen ist von Interesse:
Welche Geschwindigkeit lag bei gegebenem Bremsweg vor?

Mit der Funktion $f(x) = ax^2$ werden
Wenn-Dann-Beziehungen erfasst, z. B.:

Wenn $x = 50$, dann ist $y = 25$.

Wenn $x = 150$, dann ist $y = 225$.

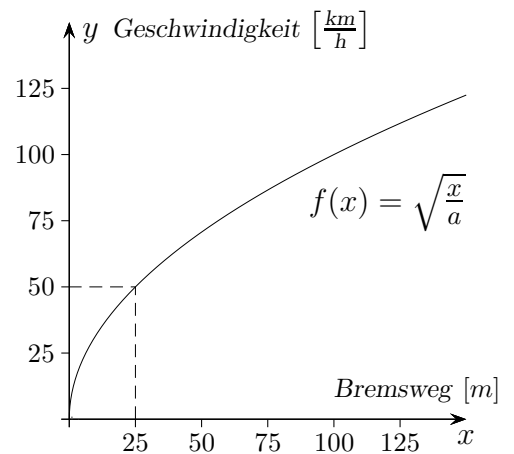
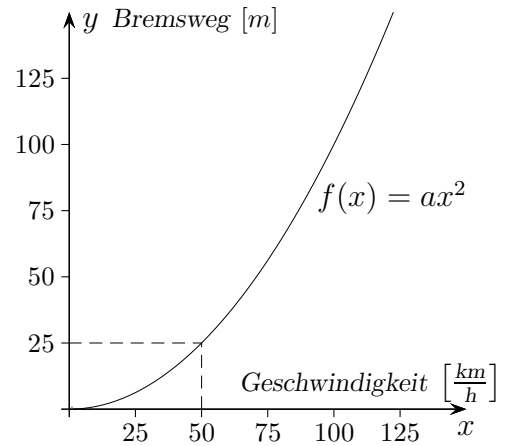
Hier ist die Umkehrung möglich.

Wenn $y = 25$, dann ist $x = 50$

Wenn $y = 225$, dann ist $x = 150$.

Trägt man den Bremsweg auf der x -Achse ab, so entsteht der Graph der *Umkehrfunktion* f^{-1} .

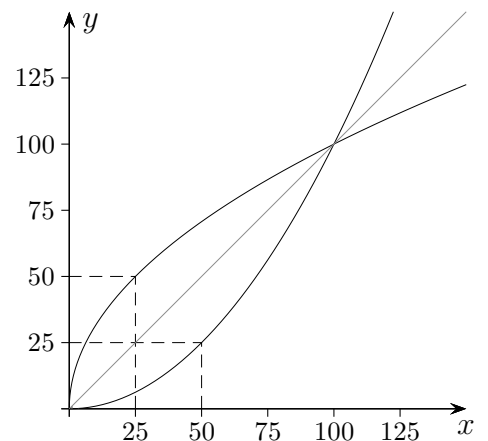
x	25	100	225
$f^{-1}(x)$	50	100	150



Der Graph der Umkehrfunktion entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden.

Der Funktionsterm von f^{-1} ergibt sich durch Vertauschen von x und y und anschließendes Auflösen nach y .

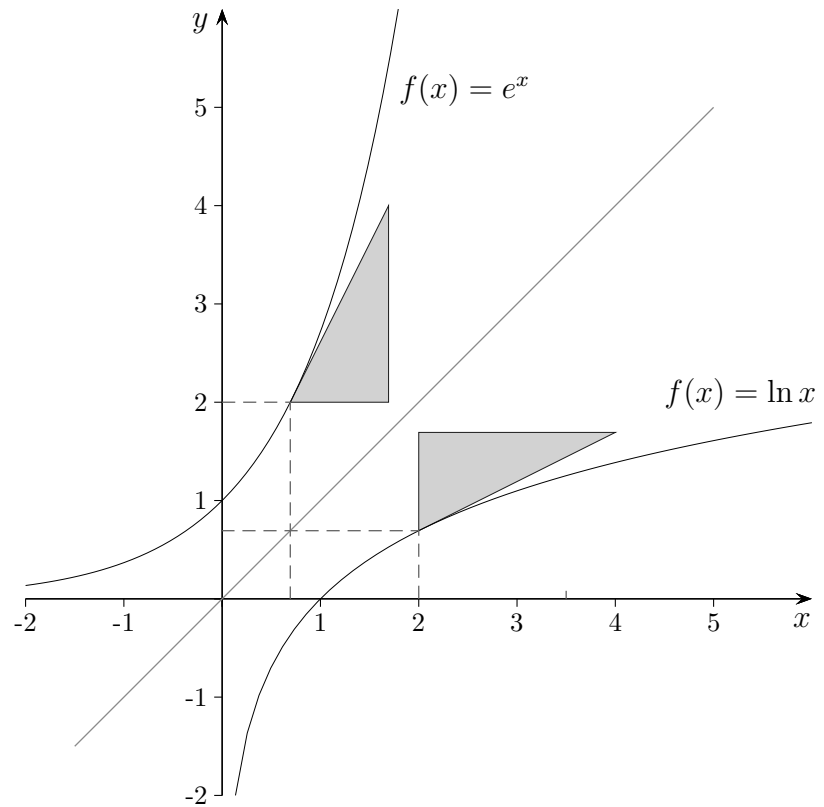
$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2, & x &\geq 0 \\
 y &= ax^2 \\
 x &= ay^2 \\
 \frac{x}{a} &= y^2 \\
 y &= \sqrt{\frac{x}{a}}
 \end{aligned}$$



Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion der e -Funktion ist die \ln -Funktion.

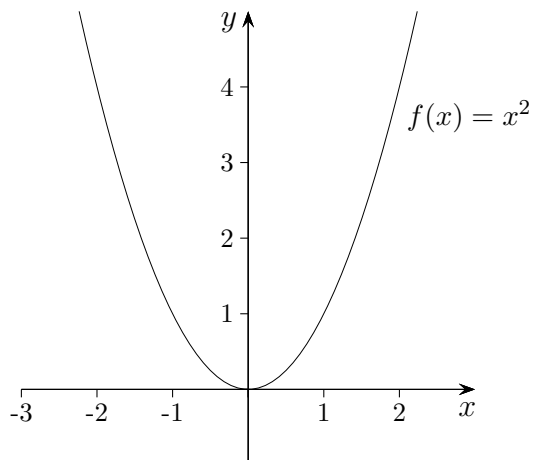
$$\begin{aligned}f(x) &= e^x \\y &= e^x \\x &= e^y \\y &= \ln x\end{aligned}$$



Aufg.

- Für welche Funktionen f existiert f^{-1} ?
- Zeige, dass gilt: $f(f^{-1}(x)) = x$
- Bilde die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{x}{x+1}$.
- Stelle eine Vermutung über die Ableitung von f^{-1} auf.
- Beweise: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
- Bilde die Ableitung von $f(x) = \ln x$.
- Bilde die Ableitung von $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, $n \in \mathcal{N}$.

Umkehrfunktion Ergänzung



Zu

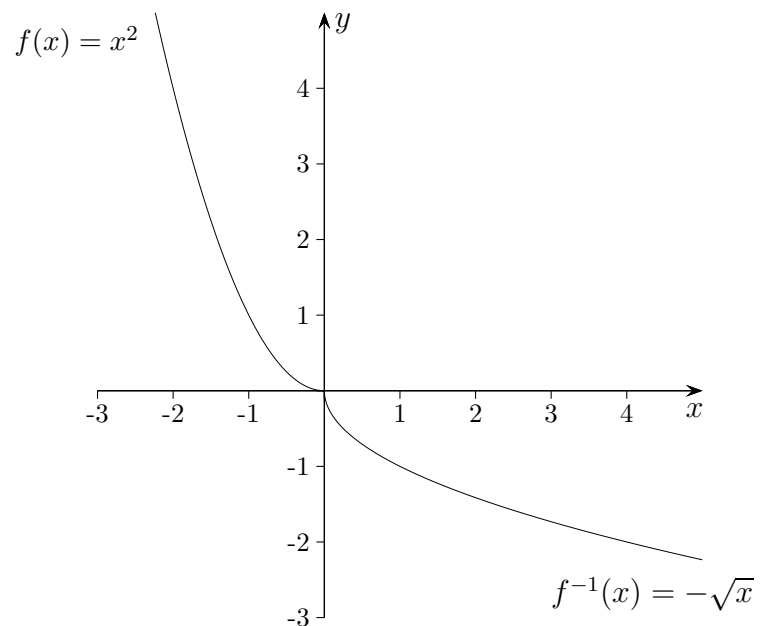
$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

existiert keine Umkehrfunktion, jedoch zu

$$f(x) = x^2, \quad x \geq 0, \quad \text{nämlich } f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Der Definitionsbereich muss also so eingeschränkt werden, dass die Funktion umkehrbar wird. Möglich wäre auch:

$$f(x) = x^2, \quad x \leq 0, \quad \text{mit } f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$



Differenzialrechnung
Startseite