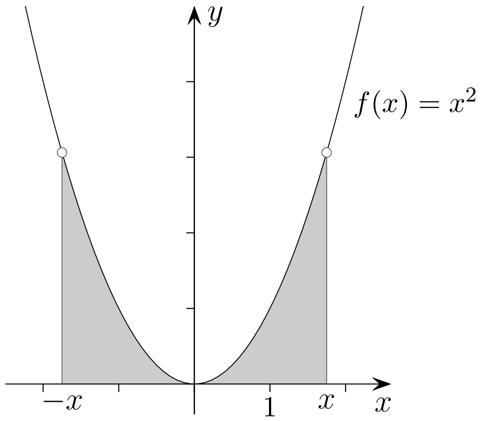
Symmetrie von Graphen

1. Achsen- und Punktsymmetrie ◯
2. Symmetrie von Polynomen ◯
3. Punktsymmetrie zum Wendepunkt
4. Punktsymmetrie zu P
5. Punktsymmetrie zu P alternativ
6. Flächenberechnung
7. Graphen spiegeln
8. Aufgabe

Für den Anfang geeignet ◯

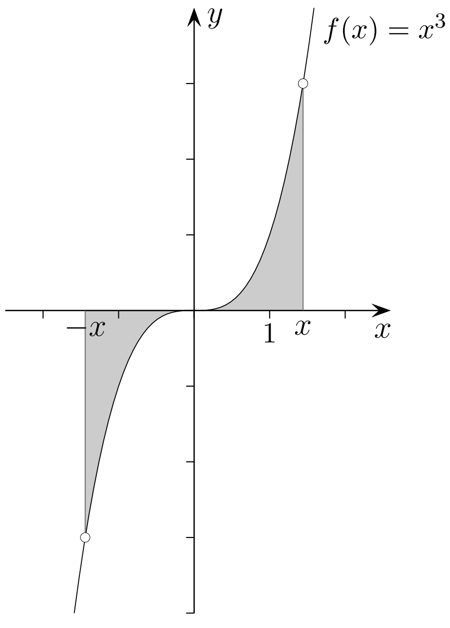
↑ Symmetrie von Graphen



Wir untersuchen Funktionsgraphen auf Symmetrie.

a) Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Für x-Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, ergeben sich dieselben Funktionswerte.

Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, falls $f(x) = f(-x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich ist.

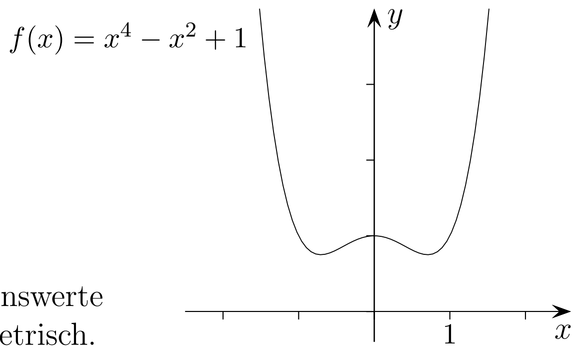


b) Der Graph der Funktion $f(x) = x^3$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Für x-Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, haben die Funktionswerte unterschiedliches Vorzeichen.

Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich ist.

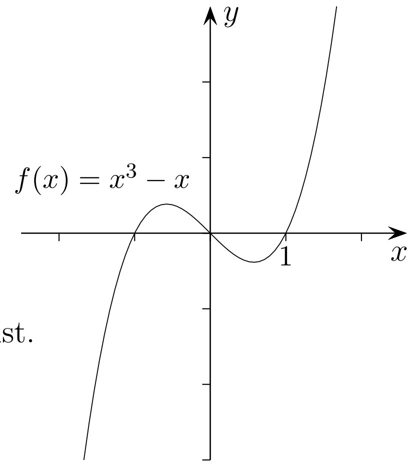
↑ Symmetrie von Polynomen

Die Symmetrie von Polynomen lässt sich leicht erkennen.



Wir betrachten das Beispiel: $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

Aufgrund der geraden Exponenten stimmen die Funktionswerte für x und $-x$ überein, der Graph ist daher achsensymmetrisch.



Falls nur ungerade Exponenten vorhanden sind, wie z. B.
für $f(x) = x^3 - x$, und der Graph durch den Ursprung verläuft,
liegt Punktsymmetrie zum Ursprung vor, wie leicht nachzurechnen ist.

$$\begin{aligned} f(-x) &\stackrel{?}{=} -f(x) \\ (-x)^3 - (-x) &\stackrel{?}{=} -(x^3 - x) \\ -x^3 + x &= -x^3 + x \end{aligned}$$

Der Graph eines Polynoms mit nur geraden Exponenten ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Beispiel: $f(x) = x^6 - 3x^2 + 5$

Der Graph eines Polynoms mit nur ungeraden Exponenten ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn überdies der konstante Summand Null ist.

Beispiel: $f(x) = x^5 + 2x^3 - x$

nicht punktsymmetrisch wäre: $f(x) = x^5 - x^3 + 2$

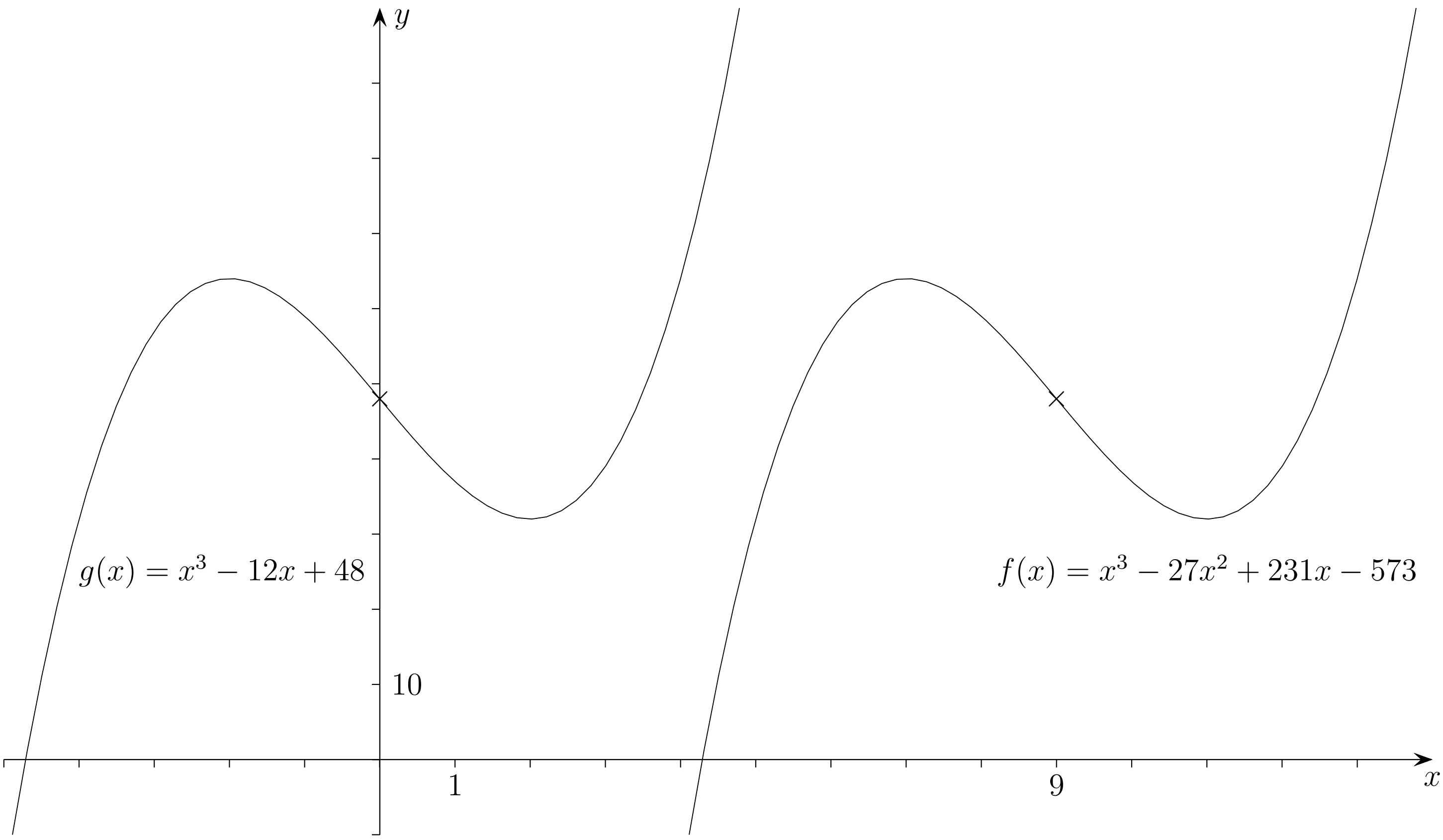
Von diesen Sätzen gelten auch die Umkehrungen, so dass also z.B. der Graph von $f(x) = x^4 + 3x^3$ aufgrund der gemischten Exponenten weder y-achsensymmetrisch, noch punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Man kann zeigen, dass ein Polynom 3. Grades stets punktsymmetrisch zum Wendepunkt ist.

$\uparrow$ Punktsymmetrie zum Wendepunkt

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

$f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_w = -\dfrac{b}{3}$



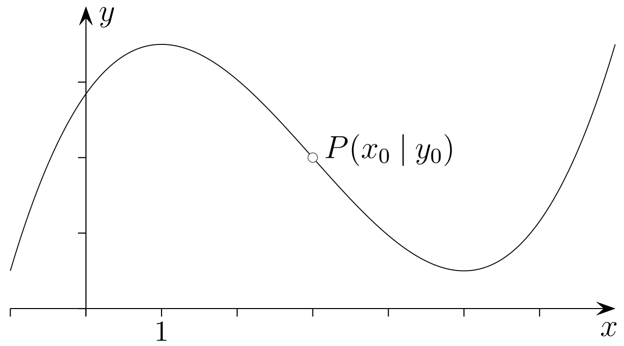
$g(x) = f(x + x_w)$

$g(x) = x^3 - (c - \dfrac{b^2}{3})\,x + y_w$

$$y_w = \frac{2b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d$$

Aufg.
Erläutere die Beweisidee und führe den Nachweis genauer aus.

$\uparrow$ Punktsymmetrie zu P

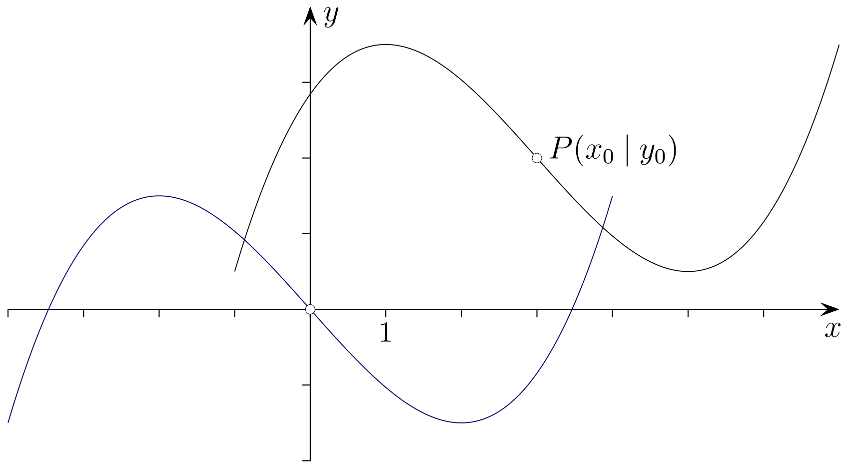


Erläutere:
Der Graph von f ist genau dann punktsymmetrisch zu $P(x_0 \mid y_0)$, falls gilt:

$$
\begin{aligned}
& f(x + x_0) - y_0 = -\big(f(-x + x_0) - y_0\big) \\
\iff\quad & f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0
\end{aligned}
$$

Hinweis:
Für die Punktsymmetrie zum Ursprung kann $f(x) + f(-x) = 0$ unmittelbar gesehen werden.
Ähnlich offensichtlich ist $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$ für die Punktsymmetrie zu $P(x_0 \mid y_0)$.

↑ Punktsymmetrie zu P



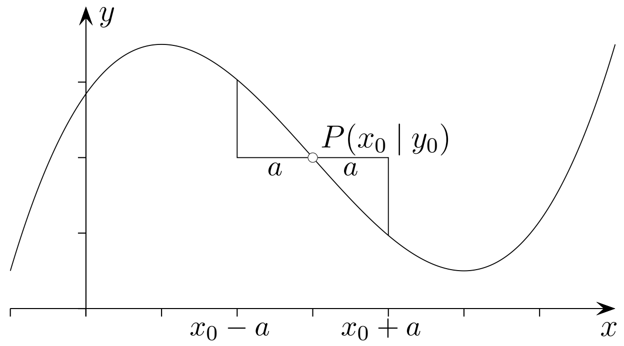
Der Graph von f ist genau dann punktsymmetrisch zu $P(x_0 \mid y_0)$, falls gilt:

$$f(x + x_0) - y_0 = -\big(f(-x + x_0) - y_0\big)$$

$$\iff \quad f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$$

Der Graph von f wird so verschoben, dass $P(x_0 \mid y_0)$ in den Ursprung fällt.
Die Bedingung der Punktsymmetrie zum Ursprung $f(x) = -f(-x)$ wird auf den verschobenen Graphen von $x \longrightarrow f(x + x_0) - y_0$ angewandt.

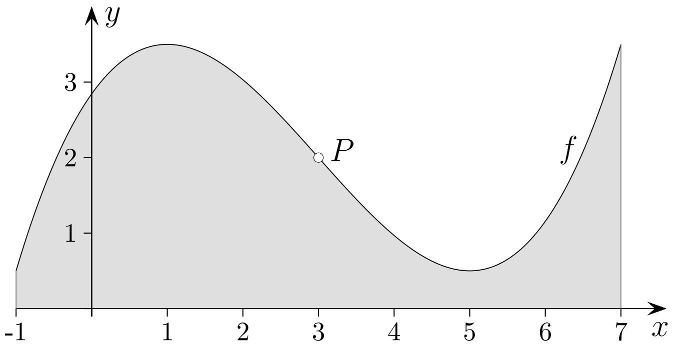
↑ Punktsymmetrie zu P alternativ



Erläutere:
Der Graph von f ist genau dann punktsymmetrisch zu $P(x_0 \mid y_0)$, falls gilt:

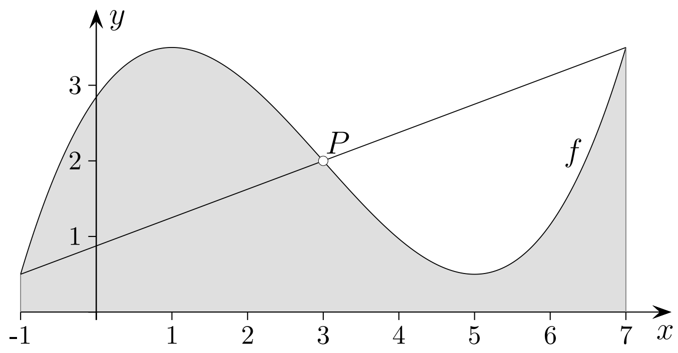
$$\begin{aligned} & f(x_0 - a) - y_0 = y_0 - f(x_0 + a) \\ \iff \quad & f(x_0 + a) + f(x_0 - a) = 2y_0 \end{aligned}$$

↑ Flächenberechnung

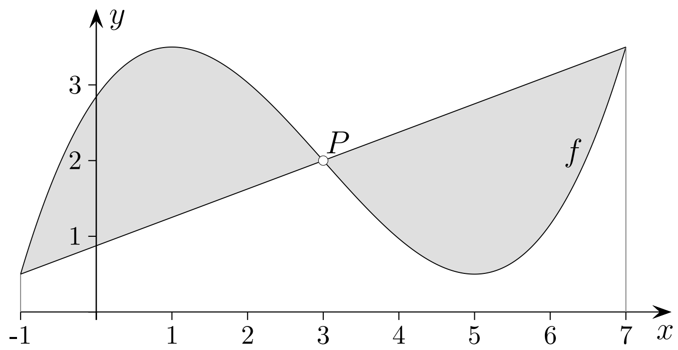


Der Graph von f ist punktsymmetrisch zu $P(3\,|\,2)$.
Ermittle den Inhalt der Fläche unter dem Graphen in den Grenzen von -1 bis 7.
Beachte, der Funktionsterm wird nicht benötigt.

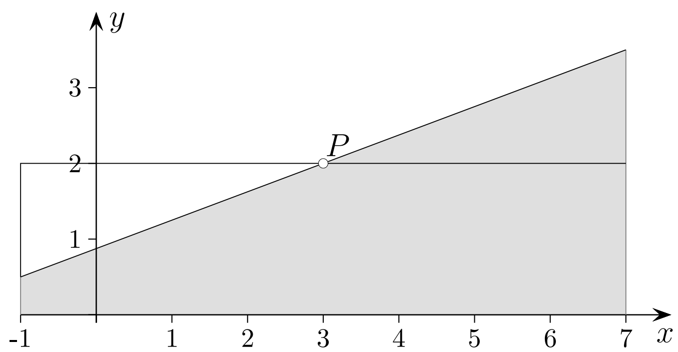
↑ Flächenberechnung



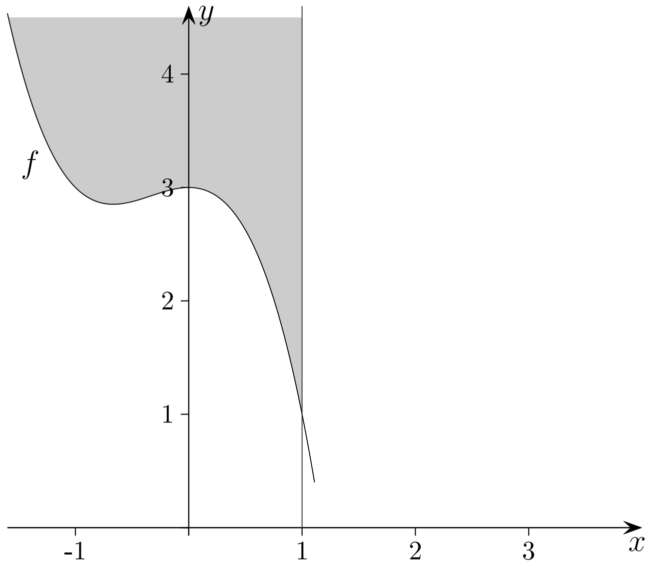
Der Graph von f ist punktsymmetrisch zu $P(3 \mid 2)$.
Ermittle den Inhalt der Fläche unter dem Graphen in den Grenzen von -1 bis 7.
Beachte, der Funktionsterm wird nicht benötigt.



$A = 8 \cdot 2 = 16$ (FE)

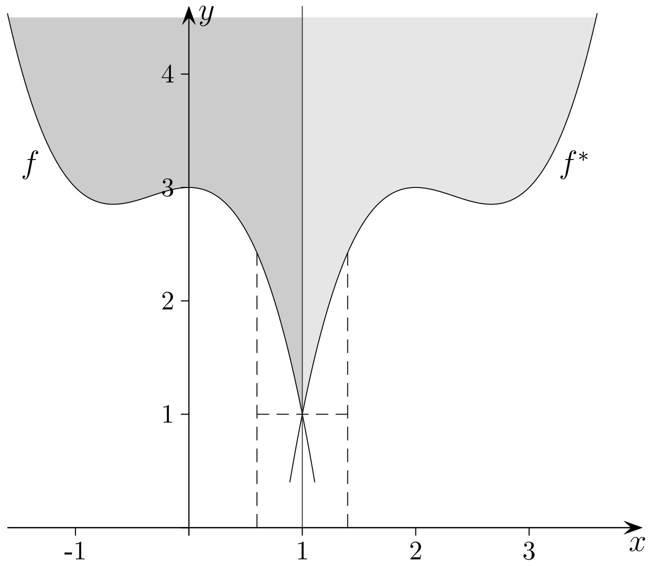


↑ Graphen spiegeln



Der Graph von $f(x) = -x^3 - x^2 + 3$ wird an der Geraden $x_s = 1$ gespiegelt.
Ermittle den zugehörigen Funktionsterm.

↑ Graphen spiegeln



Der Graph von $f(x) = -x^3 - x^2 + 3$ wird an der Geraden $x_s = 1$ gespiegelt.
Ermittle den zugehörigen Funktionsterm.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(x_s - (x - x_s)) \\ &= f(2x_s - x) \\ &= -(2-x)^3 - (2-x)^2 + 3 \end{aligned}$$

↑ Aufgabe

Die Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, die Funktion g punktsymmetrisch zum Ursprung. Beide Funktionen haben den gemeinsamen Punkt $P(3 \mid -2)$.

a) Gib jeweils einen weiteren Punkt der Funktionen f und g an.

b) Untersuche die Funktion $h(x) = f(x) \cdot (g(x))^2$ auf mögliche Symmetrieeigenschaften.

Die Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, die Funktion g punktsymmetrisch zum Ursprung. Beide Funktionen haben den gemeinsamen Punkt $P(3 \mid -2)$.

a) Gib jeweils einen weiteren Punkt der Funktionen f und g an. $f\colon\ Q(-3 \mid -2),\ g\colon\ Q(-3 \mid 2)$

b) Untersuche die Funktion $h(x) = f(x) \cdot (g(x))^2$ auf mögliche Symmetrieeigenschaften.

$$h(-x) = f(-x) \cdot (g(-x))^2 = f(x) \cdot (-g(x))^2 = f(x) \cdot (g(x))^2 = h(x)$$