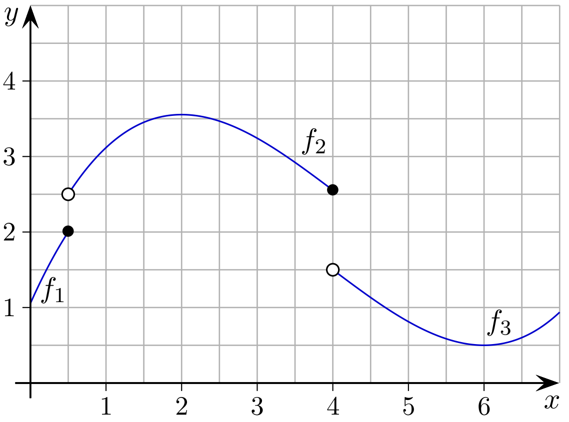
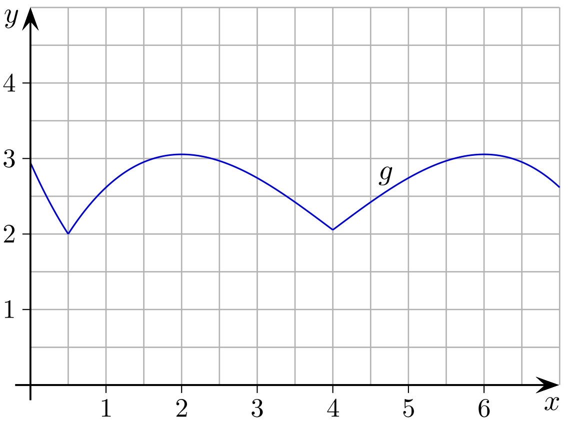
Stetigkeit und Differenzierbarkeit



- ● gehört zum Graphen
- ○ gehört nicht zum Graphen

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq 0{,}5 \\ f_2(x), & 0{,}5 < x \leq 4 \\ f_3(x), & 4 < x \end{cases}$$



Für die Schule ist Folgendes wichtig:

Eine stückweise definierte Funktion, deren Teilfunktionen stetig sind, kann an einer Nahtstelle unstetig sein, d. h. einen Sprung aufweisen. Zum Nachweis der Stetigkeit an einer Nahtstelle wird überprüft, ob die Funktionswerte der betreffenden Teilfunktionen an dieser Stelle übereinstimmen.

Eine stückweise definierte Funktion kann an einer Nahtstelle nicht differenzierbar sein, d. h. einen Sprung oder eine Spitze aufweisen. Zum Nachweis der Differenzierbarkeit an einer Nahtstelle wird überprüft, ob die Funktionswerte und die Ableitungen der betreffenden Teilfunktionen an dieser Stelle übereinstimmen.

Eine zusammengesetzte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < a \\ f_2(x) & x \geq a \end{cases}$$

mit $f_1(a) = f_2(a)$ ist an der Stelle a differenzierbar, falls $f_1'(a) = f_2'(a)$ ist.
(Rechtsseitige und linksseitige Ableitungen müssen übereinstimmen.)

Ist eine Funktion an der Stelle a differenzierbar, dann ist sie auch in a stetig.

Ein Intervall, zu dem die Grenzen nicht dazugehören, heißt offen, wie z. B. (0, 3).
Möglich ist auch ein links offenes und rechts abgeschlossenes Intervall wie z. B. (0, 3] oder umgekehrt.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine Funktion ist stetig, wenn ihr Graph eine nirgends unterbrochene Linie ist.

Der böhmische Priester, Philosoph und Mathematiker Bolzano 1781-1848 präzisierte 1817 als Erster die Idee der Stetigkeit (und der Differenzierbarkeit) an der Stelle a: Geringe Abweichungen von a führen zu geringen Abweichungen des Funktionswerts von $f(a)$. Seine Arbeiten wurden kaum zur Kenntnis genommen. Einige Jahre später formulierte der franz. Mathematiker Cauchy 1789-1857 Gleichwertiges.

1. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & x < 2 \\ a \cdot (x-4)^2 + b & x \geq 2 \end{cases}$$

stetig und differenzierbar ist?

2. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \leq 2 \\ bx + 1 & x > 2 \end{cases}$$

differenzierbar ist?

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & x < 2 \\ a \cdot (x-4)^2 + b & x \geq 2 \end{cases}$$

stetig und differenzierbar ist?

Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned} 1 &= 4a + b \\ -4 &= -4a \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad a = 1$ und $b = -3$

2. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \leq 2 \\ bx + 1 & x > 2 \end{cases}$$

differenzierbar ist?

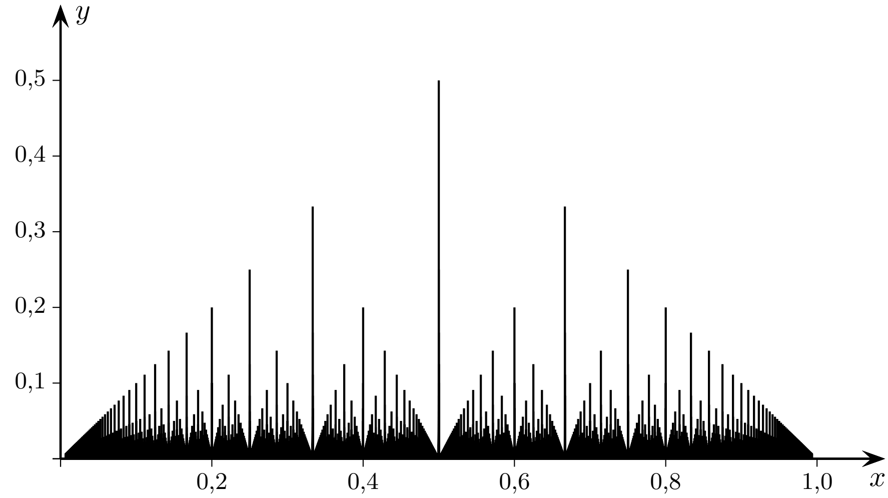
Stetigkeit muss auch vorliegen.

Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned} 2a - b &= -3 \\ 4 + a &= b \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad a = 1$ und $b = 5$

Thomaesche Funktion im Intervall $[0, 1]$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x > 0 \text{ und } \frac{p}{q} \text{ rational und } \mathrm{ggT}(p,q) = 1 \\ 1 & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Thomaesche Funktion ist an überabzählbar vielen Stellen stetig (auf den rationalen Zahlen unstetig und auf den irrationalen stetig), aber nirgendwo differenzierbar. Sie ist periodisch mit der Periode 1. Hier wird ersichtlich, wie bedeutsam präzise Begriffsbildungen (Definitionen) in der Mathematik sind. Dieses Maß an Präzision bleibt der Hochschule vorbehalten. Anfänger kommen leicht ins Straucheln.