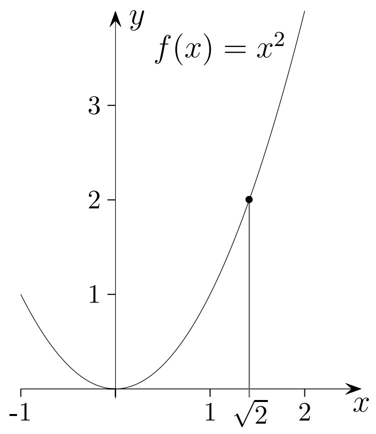
Stetigkeit



$\sqrt{2}$ ins Quadrat genommen ergibt 2. Nehmen wir für $\sqrt{2}$ eine Näherung, z. B. $\sqrt{2} = 1,41$, so liegt das Quadrat, nämlich 1,9881, in der Nähe von 2. Nähmen wir eine bessere Näherung für $\sqrt{2}$, so läge das Quadrat der Näherung noch dichter an der 2.

Für jede Folge, die gegen $\sqrt{2}$ strebt, streben die Quadrate gegen 2, z. B.:

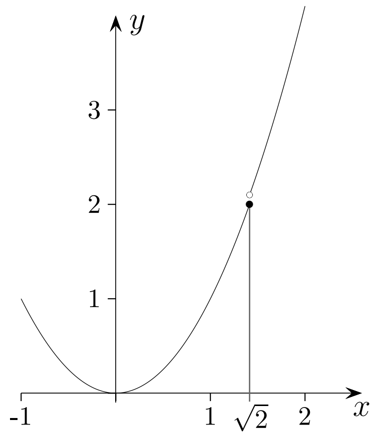
1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... $\to \sqrt{2}$

Folge der Quadrate:
1,96; 1,98; 1,9993; 1,99996; ... $\to 2$

Was bedeutet diese uns vertraute Eigenschaft anschaulich für die Funktion $f(x) = x^2$?

Für Werte, die dicht bei $\sqrt{2}$ liegen, liegen die Funktionswerte dicht bei 2.

Diese Überlegungen gelten natürlich nicht nur für die Stelle $x = \sqrt{2}$, sondern für jeden x-Wert. Daher ist der Graph von $f(x) = x^2$ zusammenhängend, er kann ohne abzusetzen gezeichnet werden.



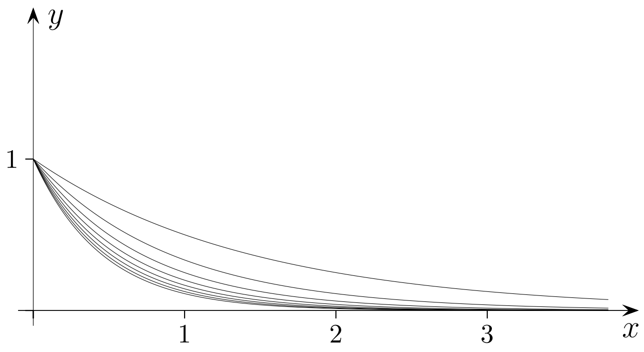
Zum Vergleich betrachte man die an der Stelle $x = \sqrt{2}$ unstetige Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \le \sqrt{2} \\ x^2 + 0{,}1 & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Eine Funktion f ist stetig an einer Stelle a, wenn für jede Folge, die gegen a strebt, die Folge der Funktionswerte gegen $f(a)$ strebt.
Eine Funktion ist stetig, wenn sie an jeder Stelle des Definitionsbereichs stetig ist.

Die uns bekannten Funktionen sind stetig, auch $f(x) = \dfrac{1}{x}$,
jedoch ist diese Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht definiert.

Stetigkeit



Die Stetigkeit kann bei Grenzprozessen verlorengehen, betrachte hierzu die Funktionen

$f_n(x) = n^{-x}, \quad x \geq 0$ und

$$k(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

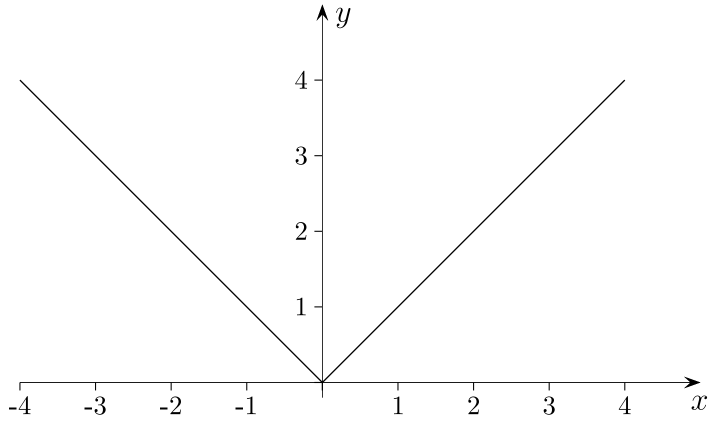
Stetigkeitsnachweise sind im allgemeinen recht schwierig. Es gilt zum Beispiel der Satz:

Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Die Umkehrung des Satzes ist falsch.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |\,x\,| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$



An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion zwar stetig,
jedoch nicht differenzierbar, da links- und rechtsseitige Ableitung nicht übereinstimmen:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$$

Auf eine Grenzwertbildung kann im Allgemeinen verzichtet werden, denn es gilt:

Eine zusammengesetzte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < a \\ f_2(x) & x \geq a \end{cases}$$

mit $f_1(a) = f_2(a)$ ist an der Stelle a differenzierbar, falls $f_1'(a) = f_2'(a)$ ist.
(Rechtsseitige und linksseitige Ableitungen müssen übereinstimmen.)

Aufg.
Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & x < 2 \\ a \cdot (x-4)^2 + b & x \geq 2 \end{cases}$$

stetig und differenzierbar ist?

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & x < 2 \\ a \cdot (x-4)^2 + b & x \geq 2 \end{cases}$$

   stetig und differenzierbar ist?

2. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \leq 2 \\ bx + 1 & x > 2 \end{cases}$$

   differenzierbar ist?

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & x < 2 \\ a \cdot (x-4)^2 + b & x \geq 2 \end{cases}$$

stetig und differenzierbar ist?

Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned} 1 &= 4a + b \\ -4 &= -4a \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad a = 1$ und $b = -3$

2. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \leq 2 \\ bx + 1 & x > 2 \end{cases}$$

differenzierbar ist?

Stetigkeit muss auch vorliegen.

Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned} 2a - b &= -3 \\ 4 + a &= b \end{aligned}$$

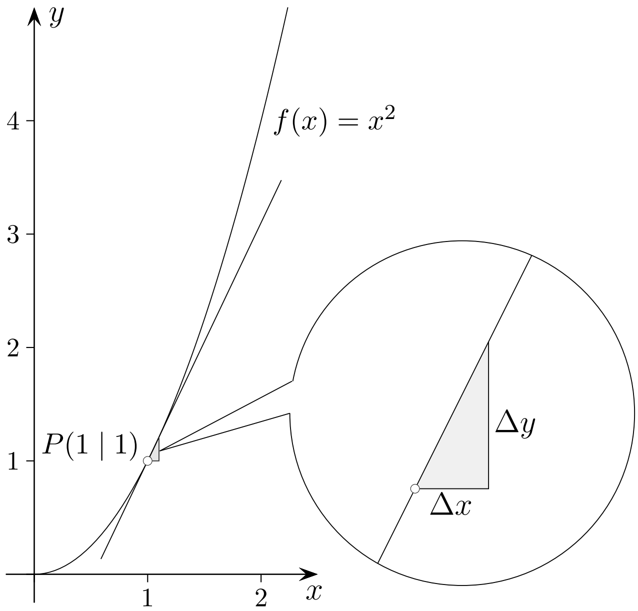
$\Longrightarrow \quad a = 1$ und $b = 5$

Eine Funktion f ist an der Stelle a stetig, wenn $f(a)$ der beidseitige Grenzwert

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

der Funktionswerte bei Annäherung sowohl von links (also für $x < a$) als auch von rechts ($x > a$) ist.

Anschaulich bedeutet das, dass der Graph an der Stelle a keinen Sprung aufweist und bei Stetigkeit in einem Intervall ohne abzusetzen gezeichnet werden kann.
In der Schule reicht diese Vorstellung aus.



Eine Funktion f ist an der Stelle a differenzierbar, wenn der beidseitige Grenzwert $f'(a)$ der Differenzenquotienten

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{alternativ} \qquad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

bei Annäherung sowohl von links (also für $h < 0$ bzw. $x < a$) als auch von rechts ($h > 0$ bzw. $x > a$) existiert.

Anschaulich bedeutet das, dass der Graph an der Stelle a keinen Knick aufweist.
Diesen Grenzwert muss man im seltesten Fall direkt berechnen, zur Bestimmung der Ableitung einer Funktion werden fast immer die Ableitungsregeln benutzt.