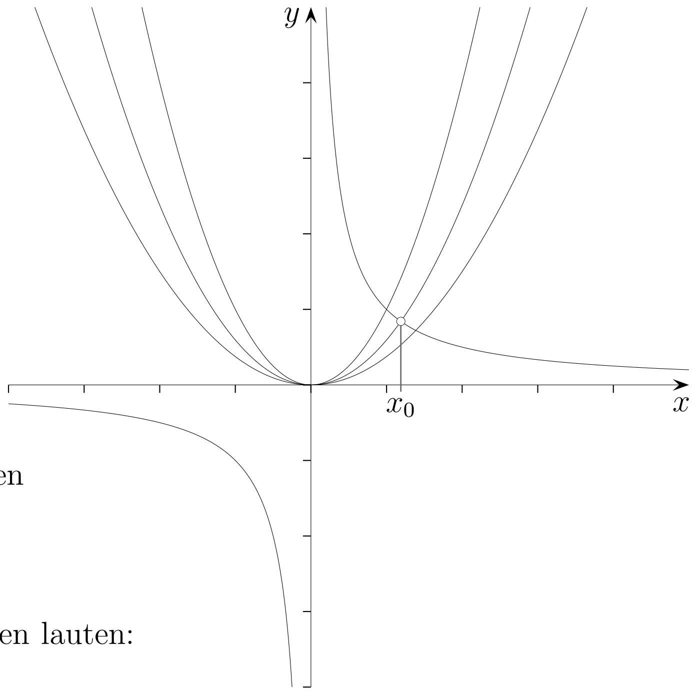
Senkrechtes Schneiden von Graphen



Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = ax^2, \qquad a > 0$$
$$g(x) = \frac{1}{x}$$

Wie ist das a zu wählen, damit sich die Graphen rechtwinklig schneiden?

Die Bedingungen für das rechtwinklige Schneiden lauten:

1. $$f(x_0) = g(x_0)$$
2. $$f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$$

Die 1. Bedingung besagt, dass die Funktionswerte an der Stelle x_0 gleich sind, die Graphen sich also schneiden. Die 2. Bedingung beinhaltet, dass die Tangenten im Schnittpunkt rechtwinklig zueinander verlaufen.

Für die obige Aufgabe ergibt sich somit:

1. $$ax_0^2 = \frac{1}{x_0} \qquad | \cdot x_0$$
2. $$2ax_0 \cdot (-\frac{1}{x_0^2}) = -1 \qquad | \text{ kürzen}$$

---

1. $$ax_0^3 = 1$$
2. $$-2a \cdot \frac{1}{x_0} = -1 \qquad | \cdot (-x_0)$$

---

2. $$2a = x_0$$

$x_0 = 2a$ in 1. eingesetzt:

$$a \cdot (2a)^3 = 1$$
$$a \cdot 8a^3 = 1$$
$$a^4 = \tfrac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad a = \sqrt[4]{\tfrac{1}{8}}$$

Wir erhalten 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Wegen der Potenzen liegt ein nichtlineares Gleichungssystem vor, das Additionsverfahren ist ungeeignet.
Nichtlineare Gleichungssysteme werden durch geeignete Multiplikation mit dem Hauptnenner vereinfacht. Aus den beiden Gleichungen ist durch Einsetzen eine Gleichung mit einer Unbekannten zu gewinnen.