1. Notwendige und hinreichende Bedingungen ○
2. Wendepunkte ○
3. Nachdenkenswertes
4. Vorzeichenwechsel von f' beachten
5. Vorzeichenwechsel Vorzeichentabelle
6. Vorzeichenwechsel ist nicht notwendig
7. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ ○
8. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$ ○
9. $f(x) = \frac{1}{40}(x-2)(x+9)^2$
10. Größter (kleinster) Funktionswert 2 Seiten ○
11. Auf einen Blick

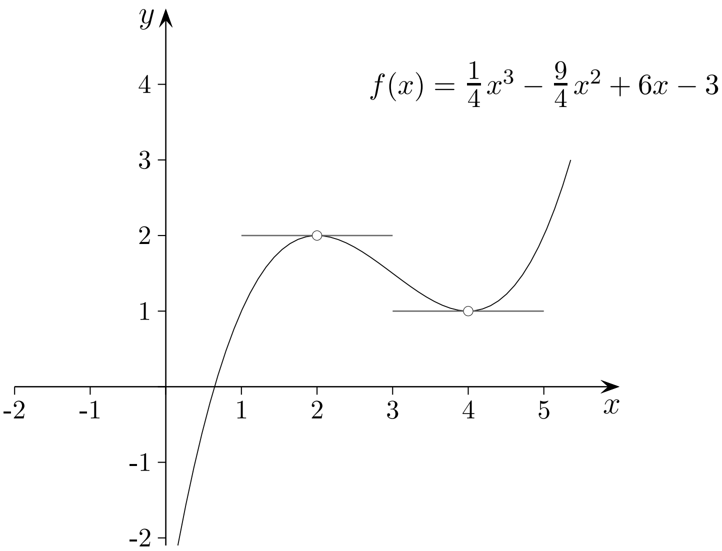
Für den Anfang geeignet ○

↑ Notwendige und hinreichende Bedingungen

1. Extrema:

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums[1] an der Stelle x_0 für eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion ist das Vorliegen einer waagerechten Tangente, d. h. also $f'(x_0) = 0$.

$f'(x_0) = 0$ ist nicht hinreichend für die Existenz eines Extremums,
es könnte auch ein Sattelpunkt vorliegen.

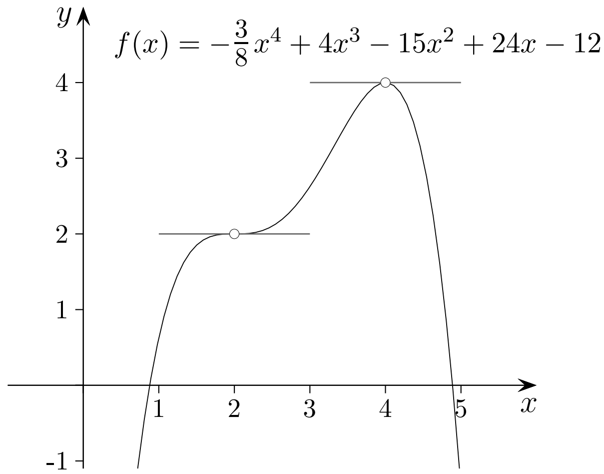


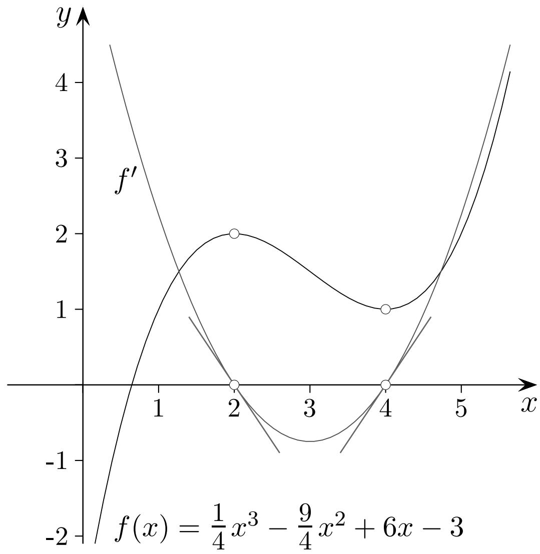
notwendig: Was brauche ich?
hinreichend: Was reicht aus?

Hinreichend wäre:

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ für ein Maximum und
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ für ein Minimum.

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ bzw. $f''(x_0) < 0$ sind nicht notwendig für die Existenz eines Extremums, siehe das Gegenbeispiel $f(x) = x^4$.





[1] genauer: lokalen Extremums

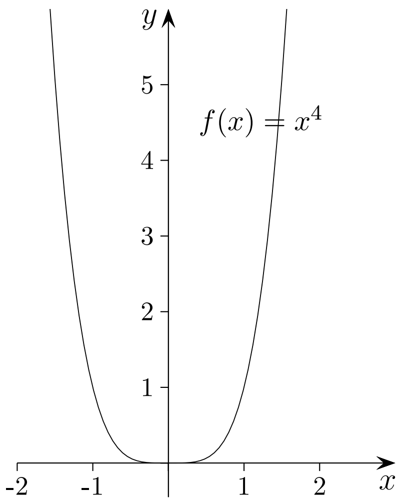
↑ Wendepunkte

Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ ist, können wir nicht entscheiden, ob ein Extremum vorliegt, dies würde sich aus einer Untersuchung noch höherer Ableitungen ergeben, was aber in der Schule unterbleibt. Durch die Untersuchung auf Wendepunkte wird die Situation ohnehin in vielen Fällen geklärt.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 \\ f'(x) &= 4x^3 \\ f''(x) &= 12x^2 \end{aligned}$$

$Min\big(0 \mid 0\big)$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= 0 \end{aligned}$$



2. Wendepunkte:

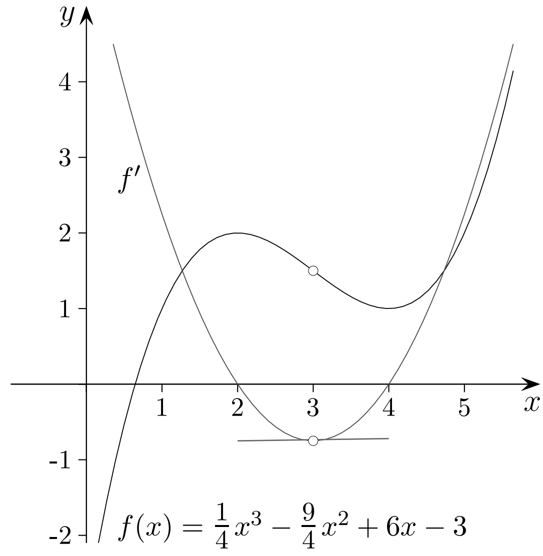
Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes an der Stelle x_0 (dem Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve oder umgekehrt) ist das Vorliegen einer waagerechten Tangente an den Graphen von f' an dieser Stelle, d. h. $f''(x_0) = 0$.

Diese Bedingung ist nicht hinreichend, siehe $f(x) = x^4$.

Hinreichend (und notwendig) für die Existenz eines Wendepunktes wäre, dass f' an der Stelle x_0 ein Extremum hat (Begründung?), hinreichend wäre also
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) > 0$ (Minimum von f') oder
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) < 0$ (Maximum von f'),

Die hinreichenden Bedingungen für einen Wendepunkt lauten zusammengefasst:
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

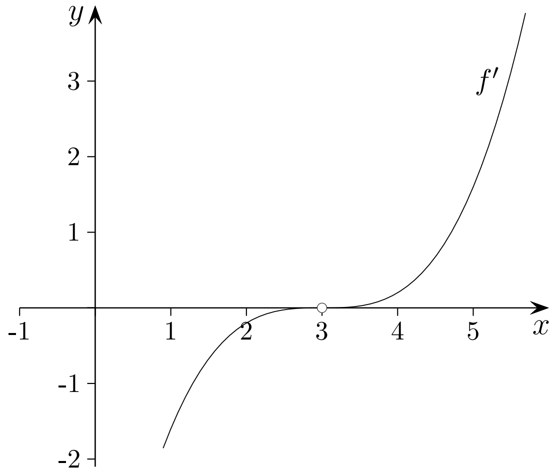
Ein Wendepunkt mit $f'(x_0) = 0$ heißt Sattelpunkt.



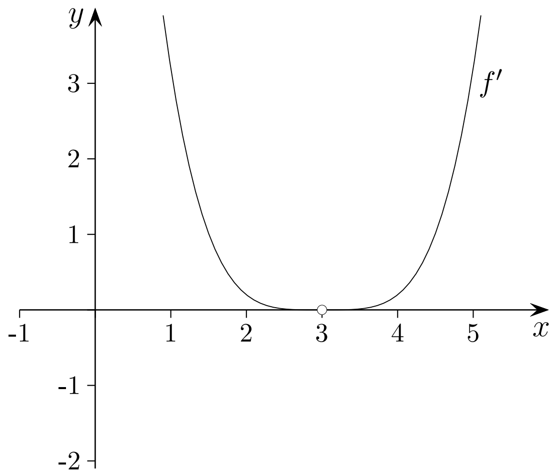
↑ Nachdenkenswertes

Was kann über den Verlauf von f an der Stelle $x = 3$ ausgesagt werden?

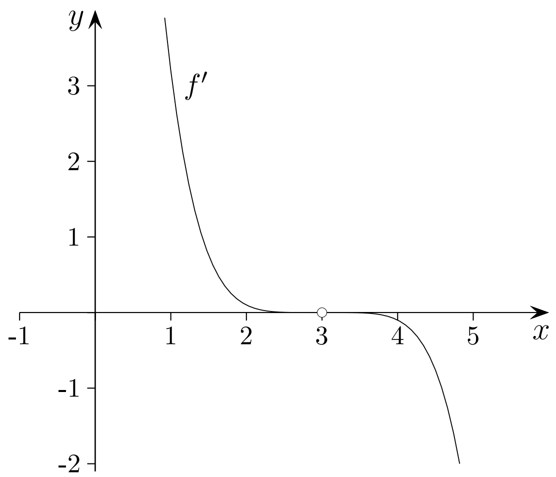
a)



b)



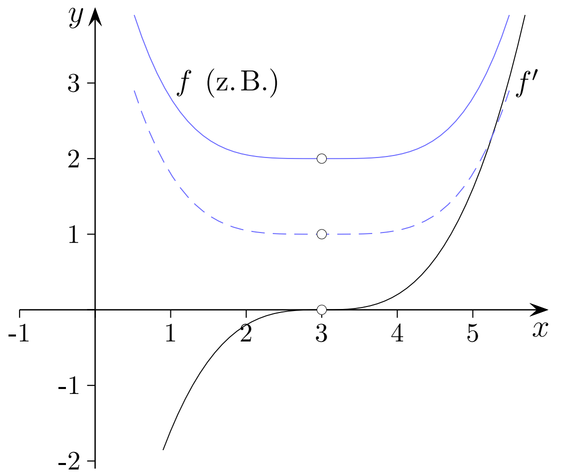
c)



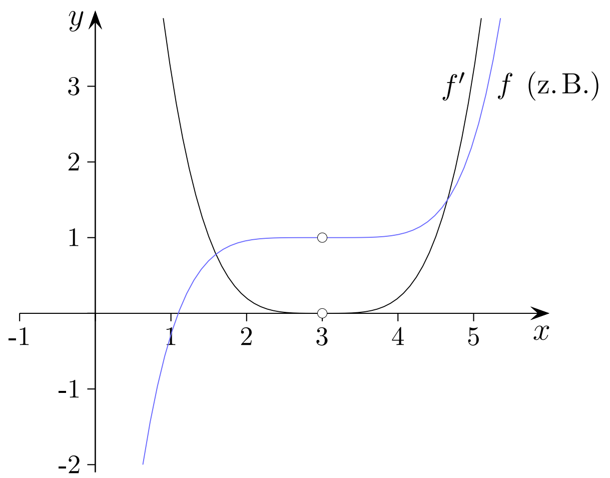
↑ Vorzeichenwechsel von f' beachten

Was kann über den Verlauf von f an der Stelle $x = 3$ ausgesagt werden?

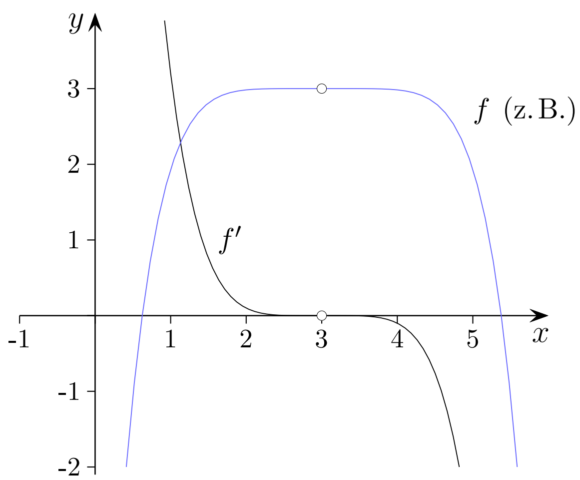
a)



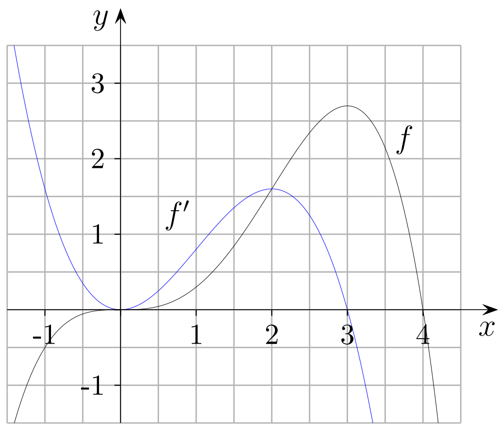
b)



c)



↑ Vorzeichenwechsel



Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^3(4-x)$.
Um das Extremum ohne GTR nachzuweisen, ermitteln wir die
1. Ableitung: $\quad f'(x) = -\frac{2}{5}x^2(x-3)$
An den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ wird f' gleich null.

Der algebraische Nachweis des Maximums kann auch ohne die 2. Ableitung erbracht werden. Hierzu ist neben $f'(x_2) = 0$ zu zeigen, dass f' in einer Umgebung von x_2 fällt, dass also in einer Umgebung von x_2 für kleinere Werte von $x_0 \quad f'(x) > 0$ und für größere Werte $f'(x) < 0$ gilt, dass also ein $+/-$ Vorzeichenwechsel von f' an der Stelle x_2 vorliegt.

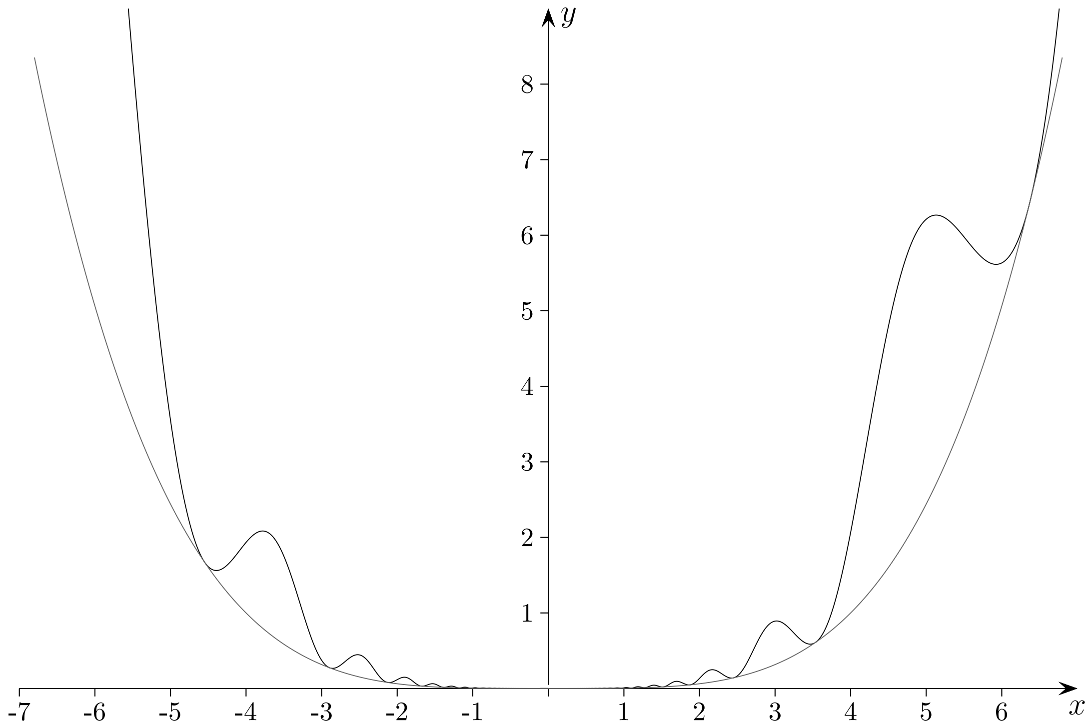
Dies kann übersichtlich in einer Vorzeichentabelle notiert werden:

$f'(x) = 0$	0		3	
$-x^2$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
f'	$+$	$+$	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	Sattelpunkt		*Max*	

Das Produkt $-x^2 \cdot (x-3)$ bestimmt das Vorzeichen.

Wenn aus der Formulierung einer Aufgabe die Existenz eines Extremums (eines Wendepunkts) hervorgeht, reicht die notwendige Bedingung aus, um die entsprechende Stelle zu ermitteln.

↑ Vorzeichenwechsel ist nicht notwendig



für ein Extremum, nur hinreichend.
Ein Vorzeichenwechsel liegt vor, wenn die Ableitung in einer linksseitigen Umgebung ≤ 0 ist und in einer rechtsseitigen Umgebung ≥ 0 (Minimum, für ein Maximum ist es umgekehrt).

$$f(x) = \begin{cases} (2 - \sin(50/x)) \cdot (x/4)^4 & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad x = 0 \end{cases}$$

f hat ein Minimum bei $x = 0$. Die Ableitung hat aber keinen Vorzeichenwechsel bei $x = 0$ (zumindest plausibel).

Für ganzrationale Funktionen gilt jedoch, dass an einer Extremstelle auch ein Vorzeichenwechsel von f' vorliegt.

↑ Untersuche auf Symmetrie, Nullstellen, Extrema (Minimum/Maximum) und Wendepunkte.

1. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

2. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$

3. $f(x) = \frac{1}{40}(x-2)(x+9)^2$

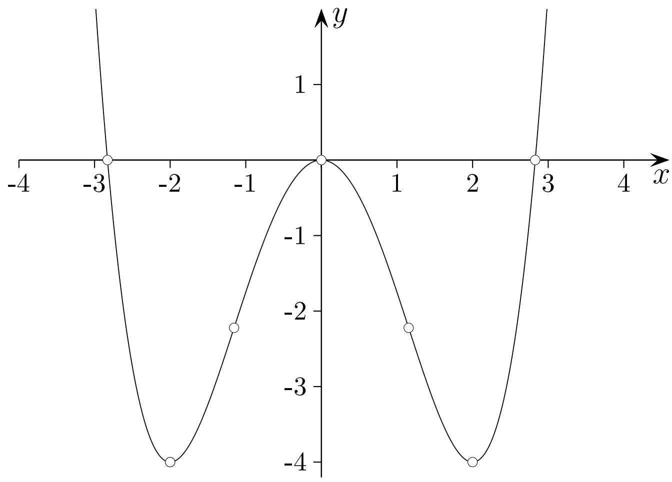
1. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

a) Symmetrie
gerade Exponenten, Graph y-achsensymmetrisch

b) Nullstellen
x^2 ausklammern, $x_1 = 0,\ x_{1/2} = \pm 2\sqrt{2}$

c) Extrema
$f'(x) = x^3 - 4x,\ f''(x) = 3x^2 - 4,\ f'''(x) = 6x$
$f'(x) = 0, \quad x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm 2, \quad f''(2) = 8,\ f''(0) = -4$
$\mathrm{Min}\big(\pm 2 \,|\, -4\big)$ Symmetrie beachten, nur einen y-Wert berechnen, $\mathrm{Max}\big(0 \,|\, 0\big)$
$f''(0) = -4$ stimmt zufällig mit dem y-Wert des Minimums überein.

d) Wendepunkte
$\mathrm{W}\big(\pm \frac{2}{\sqrt{3}} \,|\, -\frac{20}{9}\big)$ Symmetrie beachten, nur einen y-Wert berechnen



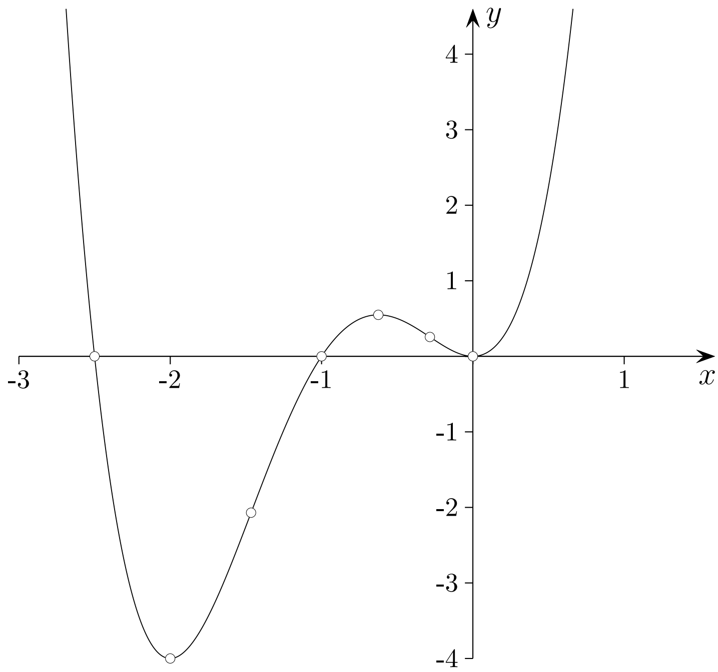
2. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$

a) keine Symmetrie

b) Nullstellen
x^2 ausklammern, pq-Formel, $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -\dfrac{5}{2}$

c) Extrema
$f'(x) = 8x^3 + 21x^2 + 10x,\ f''(x) = 24x^2 + 42x + 10,\ f'''(x) = 48x + 42$
$f'(x) = 0, \quad x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = -\dfrac{5}{8}$
$f''(-2) = 22,\ f''(0) = 10,\ f''(-\dfrac{5}{8}) = -\dfrac{55}{8}$
$\text{Min}\big(-2\,|\,-4\big),\ \text{Min}\big(0\,|\,0\big),\ \text{Max}\big(-\dfrac{5}{8}\,|\,0{,}549\big)$

d) Wendepunkte
$\text{W}\big(-0{,}284\,|\,0{,}256\big),\ \text{W}\big(-1{,}466\,|\,-2{,}070\big)$



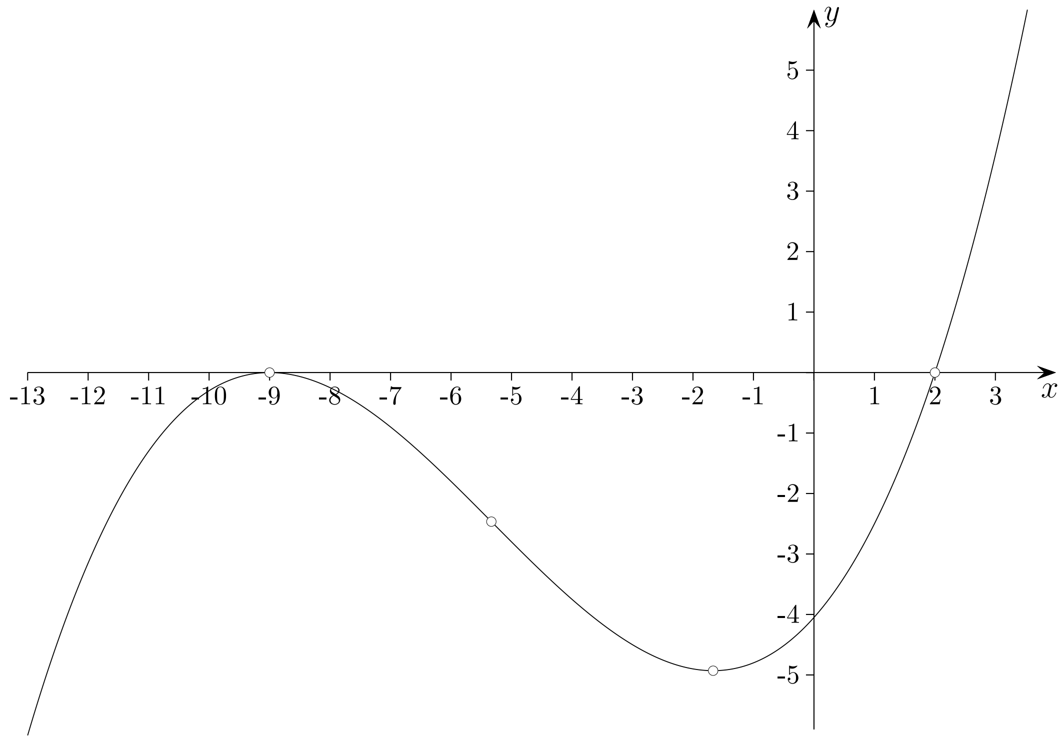
3. $f(x) = \dfrac{1}{40}(x-2)(x+9)^2$

a) keine y-Achsensymmetrie und keine Punktsymmetrie zum Ursprung,
jedoch: Eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt.

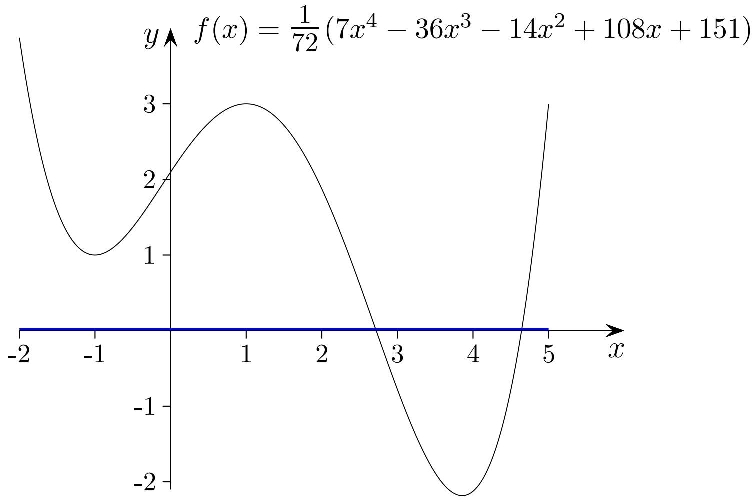
b) Nullstellen
unmittelbar erkennbar, $x_1 = 2,\ x_2 = -9$

c) Extrema
$f(x) = \dfrac{1}{40}(x^3 + 16x^2 + 45x - 162)$ Klammern wurden aufgelöst, Faktor $\dfrac{1}{40}$ bleibt erhalten
$f'(x) = \dfrac{1}{40}(3x^2 + 32x + 45),\ f''(x) = \dfrac{1}{40}(6x + 32),\ f'''(x) = \dfrac{6}{40}$
$f'(x) = 0,\quad x_1 = -9,\ x_2 = -\dfrac{5}{3}$
$f''(-9) = -\dfrac{11}{20},\ f''(-\dfrac{5}{3}) = \dfrac{11}{20}$
$\text{Min}\big(-\dfrac{5}{3}\,|\,-4{,}930\big),\ \text{Max}\big(-9\,|\,0\big)$

d) Wendepunkt
$\text{W}\big(-\dfrac{16}{3}\,|\,-2{,}465\big)$

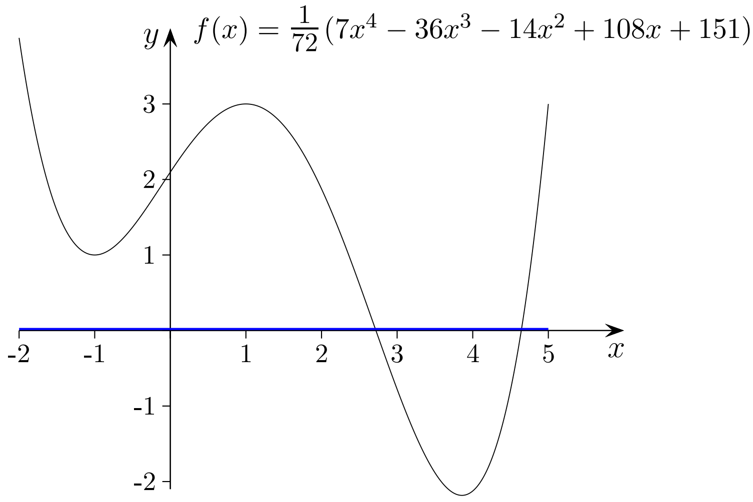


↑ Größter (kleinster) Funktionswert



Ermittle den größten und kleinsten Funktionswert von f auf dem Intervall $[-2; 5]$.
f besitzt die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{18}(x^2 - 1)(7x - 27)$.

Größter (kleinster) Funktionswert



Ermittle den größten und kleinsten Funktionswert von f auf dem Intervall $[-2; 5]$.
f besitzt die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{18}(x^2 - 1)(7x - 27)$.

<u>Lösung mit Verzicht auf die Anschauung</u>

Die möglichen Extremstellen sind
die Stellen mit waagerechter Tangente, sowie die Intervallgrenzen:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{27}{7},\ x_4 = -2,\ x_5 = 5$$

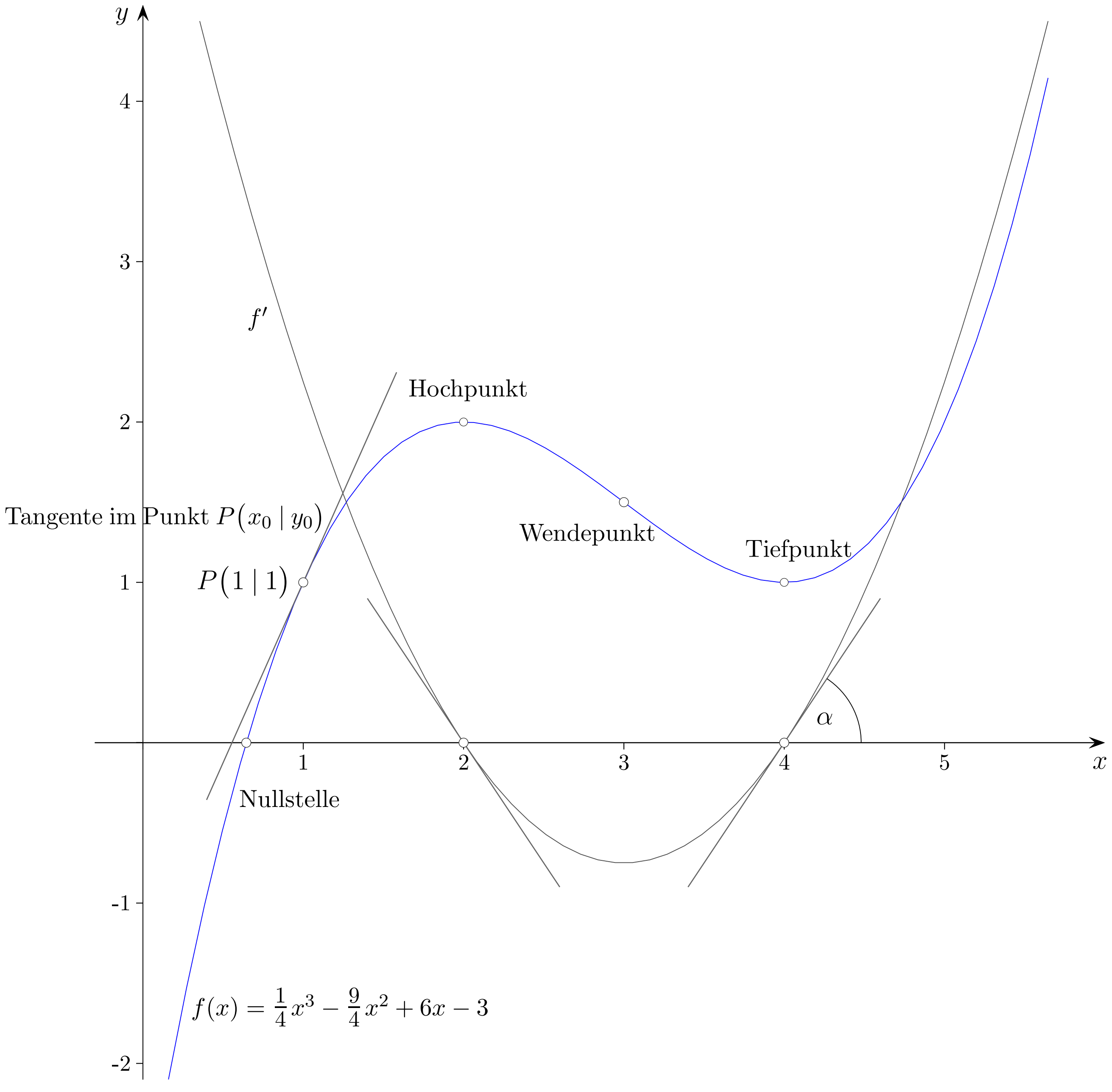
Funktionswerte der möglichen Extremstellen:

$$f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3,\ f(x_3) \approx -2{,}183,\ f(x_4) = 3{,}875,\ f(x_5) = 3$$

Das Maximum dieser Funktionswerte ist der größte Funktionswert (globales Maximum)
auf dem Intervall $[-2; 5]$, also 3,875.
Der kleinste Funktionswert (globales Minimum) auf $[-2; 5]$ (Minimum dieser Funktionswerte)
ist $-2{,}183$.

Beachte: $f''(x)$ wird nicht benötigt.

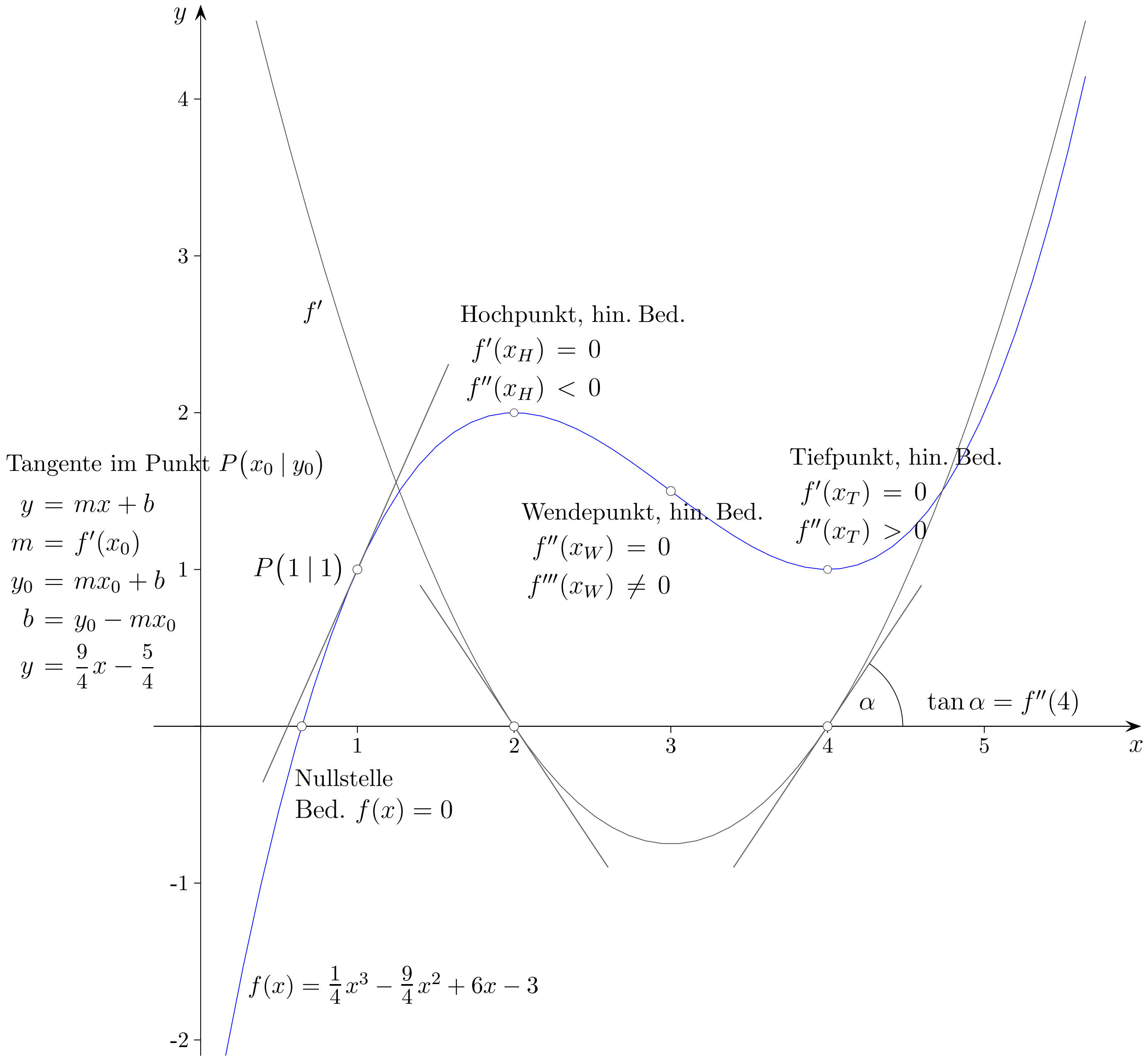
↑ Auf einen Blick



Mittlere Änderungsrate von f auf dem Intervall $[1; 3]$?

Überprüfe dein Wissen.

↑ Auf einen Blick



$H(2 \mid 2)$, $T(4 \mid 1)$, $W(3 \mid \frac{3}{2})$

Mittlere Änderungsrate von f auf dem Intervall $[1; 3]$: $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{1}{4}$

Die Nullstelle x_N wird hier mit dem GTR ermittelt, $x_N \approx 0{,}645$.

Bei der Bestimmung ganzrationaler Funktionen werden die Bedingungen $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ und $f''(x) \neq 0$ nicht verwendet.

Eine Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 schließt mit der x-Achse einen Winkel α mit $\tan\alpha = f'(x_0)$ ein. Hier liegt eine Tangente an den Graphen von f' vor, $\alpha \approx 56{,}3°$.

Startseite

4. Randextrema