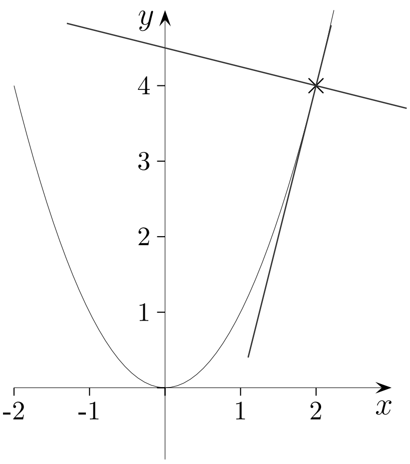
Normalengleichung



Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$.
Gesucht ist die Gleichung der Normale im Punkt $P\big(2 \mid ?\big)$.

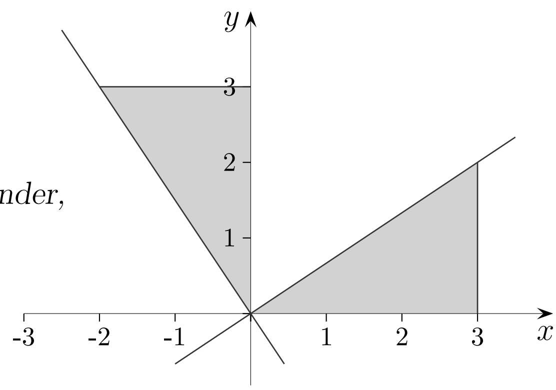
Die Normale geht durch den Punkt P und verläuft senkrecht zur Tangente im Punkt P.

Welche Beziehung besteht zwischen den Steigungen m_1 und m_2 zweier Geraden, die senkrecht (orthogonal) zueinander verlaufen?

Die Antwort entnehmen wir der nebenstehenden Zeichnung. Das eine Dreieck geht durch Drehung um 90° um den Ursprung aus dem anderen hervor, da die Koordinatenachsen einen Winkel von 90° einschließen. Folglich verlaufen die Geraden mit den Steigungen

$m_1 = \dfrac{2}{3}$ und $m_2 = -\dfrac{3}{2}$ senkrecht zueinander.

Allgemein gilt:
Zwei Geraden verlaufen genau dann senkrecht zueinander, falls das Produkt der Steigungen -1 ergibt.



Um nun die Normalengleichung $y = mx + b$ für den Punkt P aufstellen zu können, ermitteln wir zunächst die y-Koordinate von P. Wir erhalten $P\big(2 \mid 4\big)$. Dann berechnen wir die Tangentensteigung für diesen Punkt: $m_1 = f'(2) = 4$ und mit der Beziehung $m_1 \cdot m_2 = -1$ erhalten wir die Normalensteigung

$m_2 = -\dfrac{1}{4}$. Dies ergibt: $y = -\dfrac{1}{4}x + b$.

Um b zu bestimmen, gehen wir genauso vor wie bei der Aufstellung der Tangentengleichung. Insgesamt ergibt das die Normalengleichung: $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{2}$.

Wie bei der Tangentengleichung kann die Normalengleichung auch direkt aufgestellt werden:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Stelle die Normalengleichung für den Punkt P auf:

a) $f(x) = x^3 - 2x$ $\quad P\big(\frac{1}{2} \mid ?\big)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x$ $\quad P\big(-1 \mid ?\big)$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2$ $\quad P\big(4 \mid ?\big)$

a) $P\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{7}{8}\right)$ $\quad y = \frac{4}{5}x - \frac{51}{40}$

b) $P\left(-1 \mid -\frac{5}{2}\right)$ $\quad y = -x - \frac{7}{2}$

c) $P\left(4 \mid -16\right)$ $\quad y = \frac{1}{4}x - 17$