Funktionsverläufe

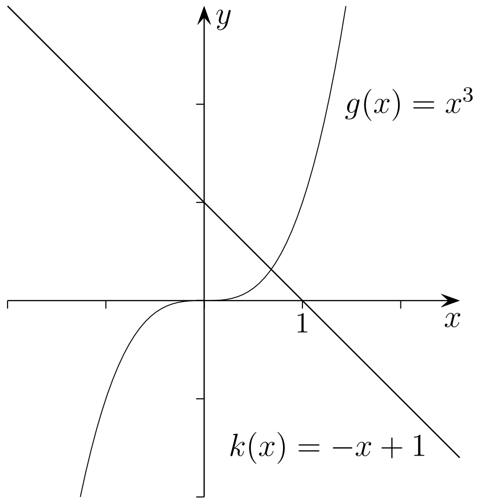
Um den Graphen von

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

zu skizzieren, skizzieren wir zunächst die Graphen der Teilfunktionen

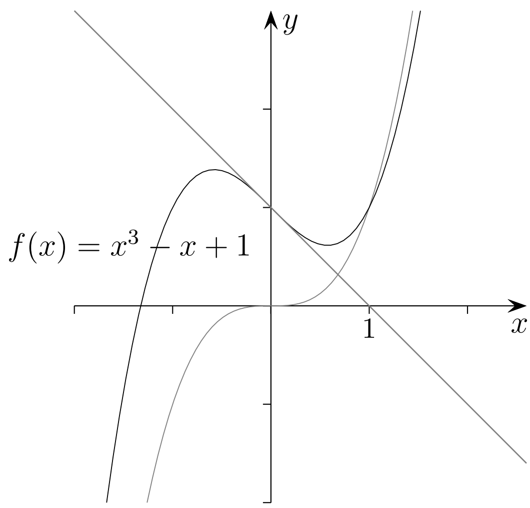
$$g(x) = x^3 \text{ und } k(x) = -x + 1\,.$$

Den Graphen von f erhalten wir dann durch *Ordinatenaddition.* (Die x-Koordinate eines Punktes heißt Abszisse, die y-Koordinate heißt Ordinate.)



Die Funktionsverläufe zeigen etwas Typisches.

In einer kleinen Umgebung des Ursprungs wird der Verlauf näherungsweise durch die Summanden mit niedrigen x-Potenzen bestimmt, für große x-Werte ist der Summand mit der höchsten x-Potenz bestimmend.

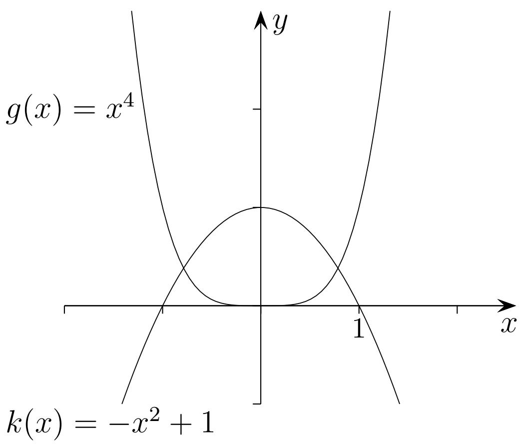


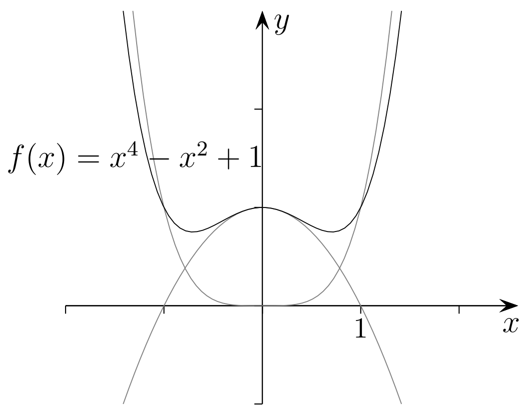
Wir betrachten ein weiteres Beispiel.
Um den Graphen von

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1$$

zu skizzieren, skizzieren wir zunächst die Graphen der Teilfunktionen

$$g(x) = x^4 \text{ und } k(x) = -x^2 + 1\,.$$





Mehrfache Nullstellen

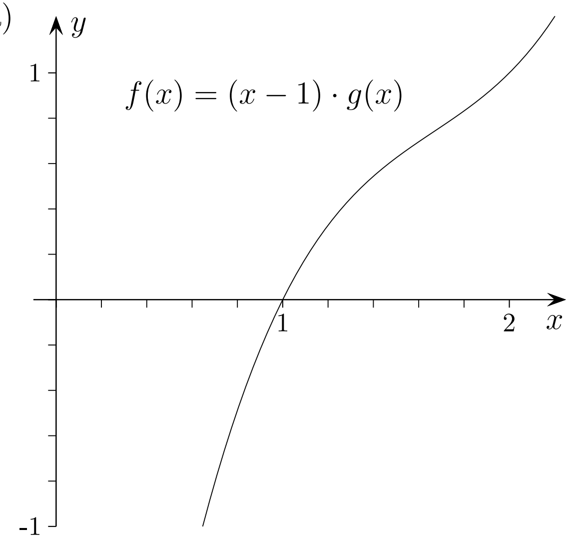
Die Funktion

$$f(x) = (x-1)\cdot(x+3)^2\cdot(x-4)^3$$

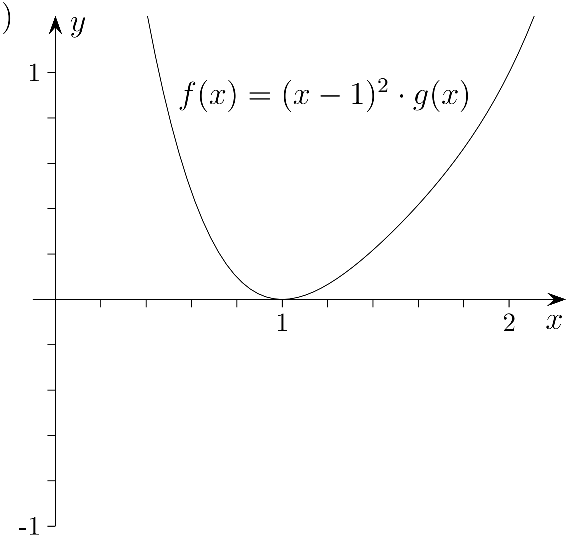
hat die einfache Nullstelle $x_1 = 1$, die doppelte Nullstelle $x_2 = -3$
und die dreifache Nullstelle $x_3 = 4$.

Erläutere den typischen Verlauf des Graphen in der Nähe der ein- bzw. mehrfachen Nullstelle,
$g(x) = x^2 - 4x + 5$.

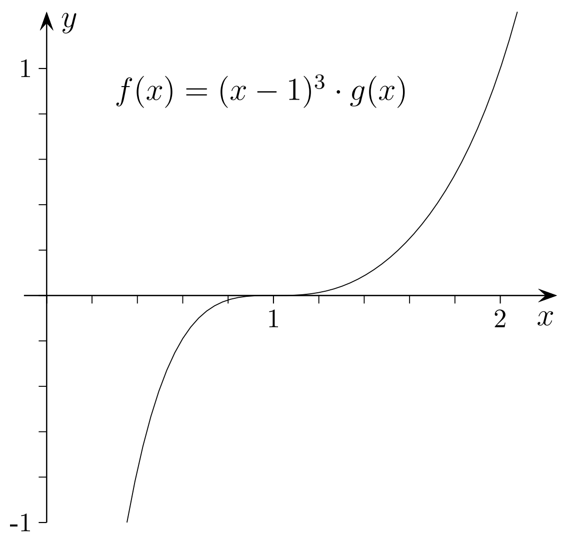
a)



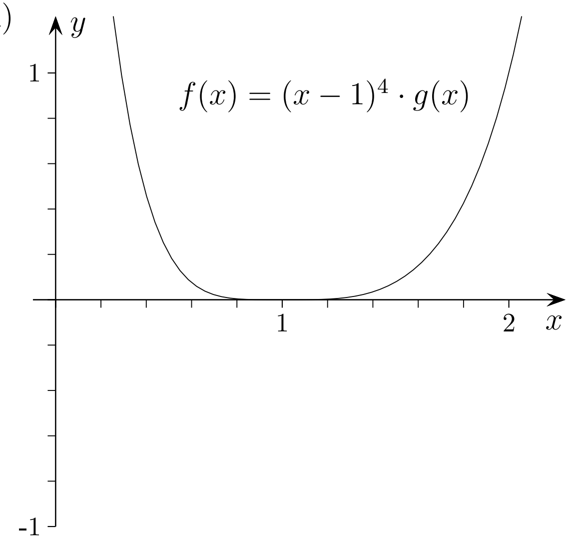
b)



c)



d)



Mehrfache Nullstellen

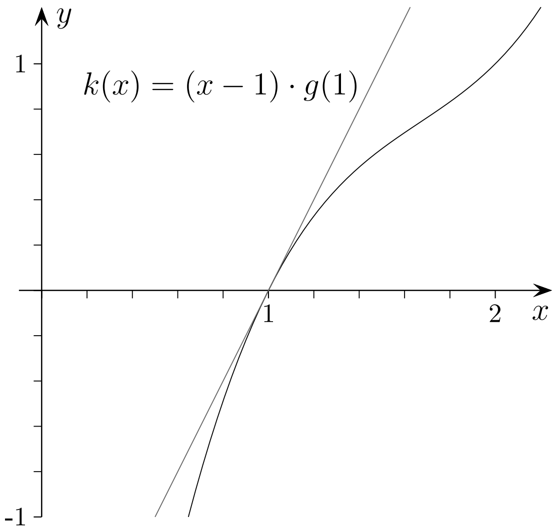
Die Funktion

$$f(x) = (x-1)\cdot(x+3)^2\cdot(x-4)^3$$

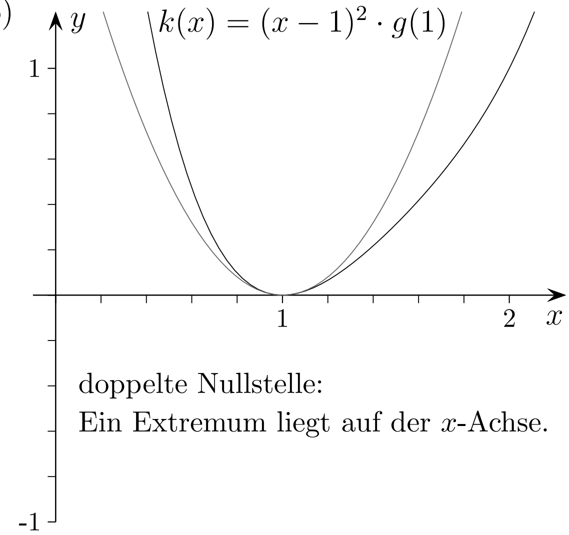
hat die einfache Nullstelle $x_1 = 1$, die doppelte Nullstelle $x_2 = -3$
und die dreifache Nullstelle $x_3 = 4$.

Erläutere den typischen Verlauf des Graphen in der Nähe der ein- bzw. mehrfachen Nullstelle,
$g(x) = x^2 - 4x + 5$.

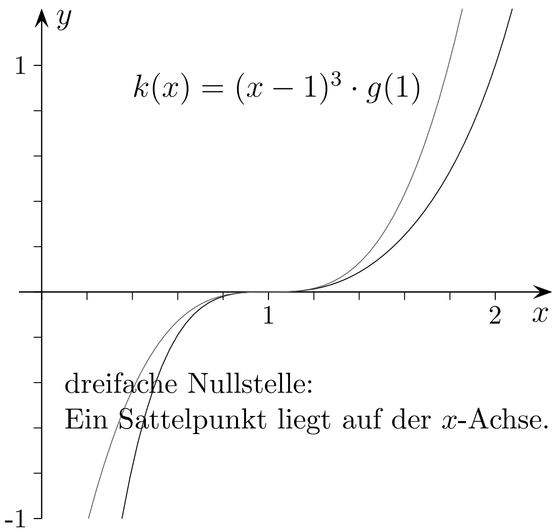
a)



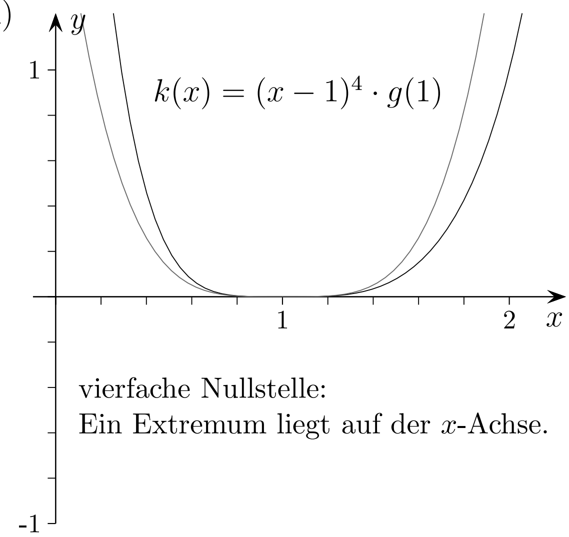
b)



c)



d)

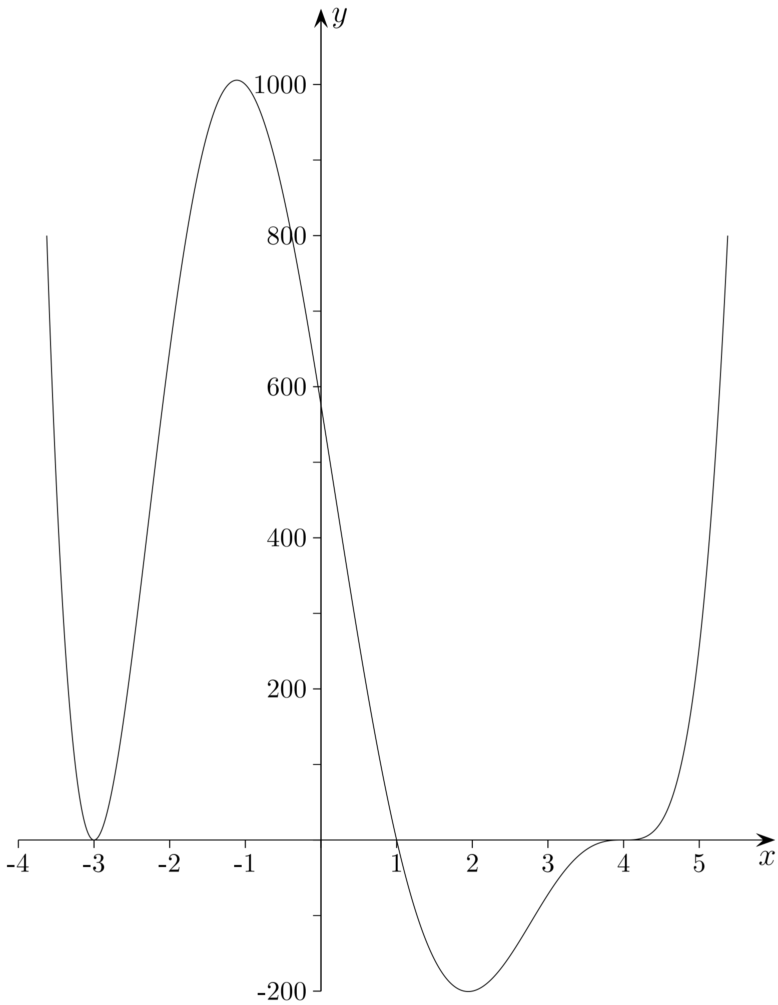


Mehrfache Nullstellen

Die Funktion

$$f(x) = (x-1)\cdot(x+3)^2\cdot(x-4)^3$$

hat die einfache Nullstelle $x_1 = 1$, die doppelte Nullstelle $x_2 = -3$ und die dreifache Nullstelle $x_3 = 4$.



Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Der Grad der Funktion ist n ($a_n \neq 0$),
a_n, a_{n-1}. …, a_1, a_0 sind die Koeffizienten.

$n = 0$	konstante Funktion	$f(x) = a_0$	
$n = 1$	lineare Funktion	$f(x) = a_1 x + a_0$	eine Nullstelle
$n = 2$	quadratische Funktion Parabel	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	höchstens 2 Nullstellen
$n = 3$	kubische Funktion	$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	1, 2 oder 3 Nullstellen
		$f(x) = (x - n_1)(x - n_2)(x - n_3)$	
		$f(x) = (x - n_1)(a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$	quadratischer Term hat höchstens 2 Nullstellen

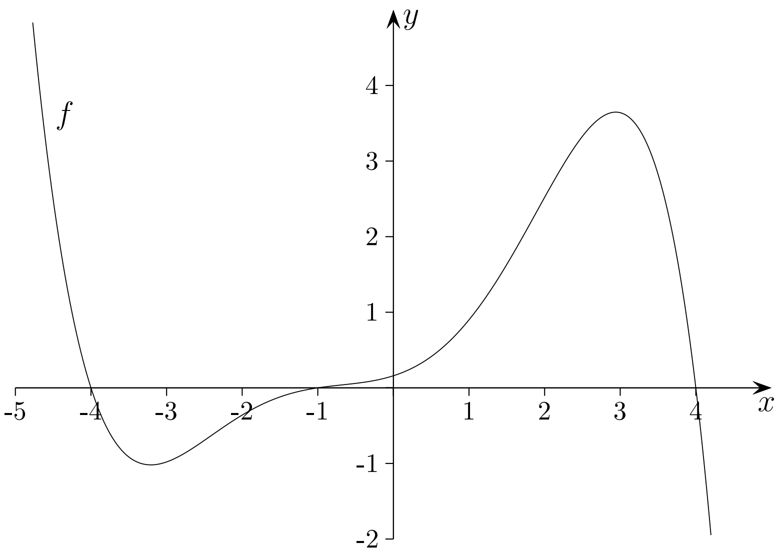
Ganzrationale Funktionen
Verhalten für $x \longrightarrow \infty$

Graph verhält sich wie der Graph der entsprechenden Potenzfunktion $g(x) = a_n x^n$.
Die Unterscheidung n gerade/ungerade ist erforderlich.

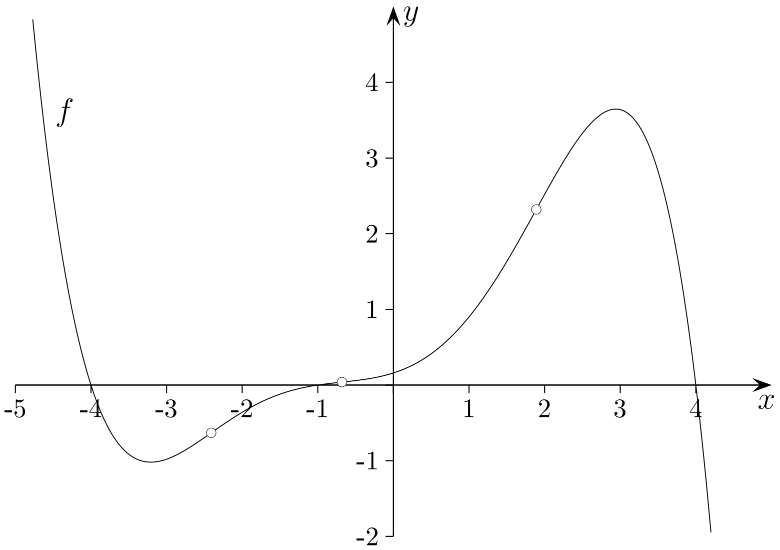
Verhalten für x in einer Umgebung der null.

Graph verhält sich wie der Graph der entsprechenden linearen Funktion $g(x) = a_1 x + a_0$.

Von welchem Grad ist f mindestens?

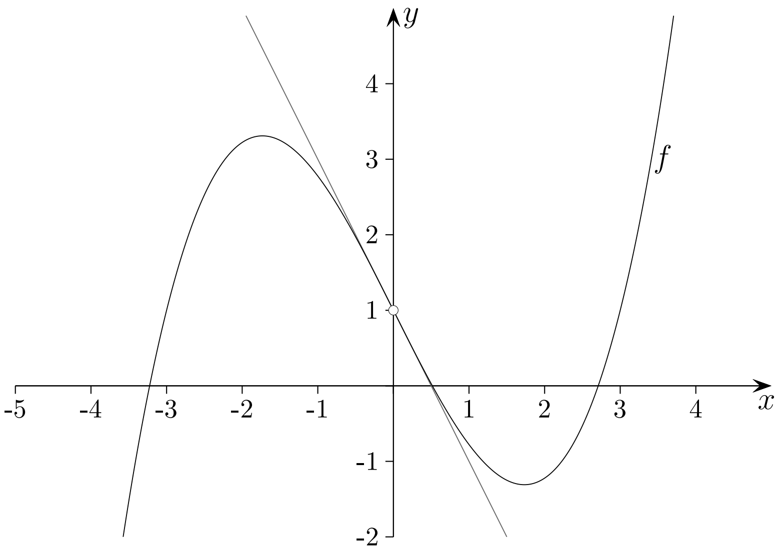


Von welchem Grad ist f mindestens?



Es liegen 3 Wendepunkte vor. f'' ist mindestens kubisch, f mindestens 5. Grades.

Verlauf in der Nähe der y-Achse



$f(x) = \frac{2}{9}x^3 - 2x + 1$

An der Stelle $x = 0$, also im Punkt $A(0 \mid 1)$, lautet die Tangentengleichung $y = -2x + 1$.

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

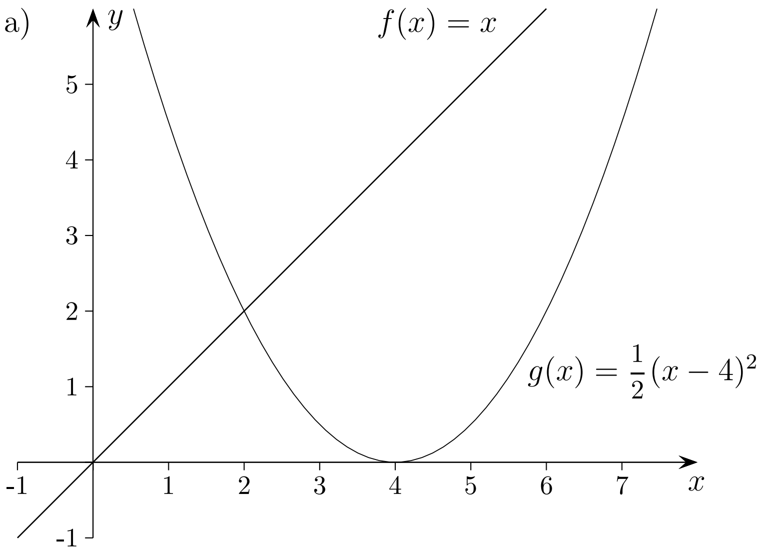
An der Stelle $x = 0$, also im Punkt $A(0 \mid a_0)$, lautet die Tangentengleichung $y = a_1x + a_0$.

Dieser Sachverhalt kann bei Fragestellungen, bei denen Funktionsterme Graphen zugeordnet werden sollen, nützlich sein.

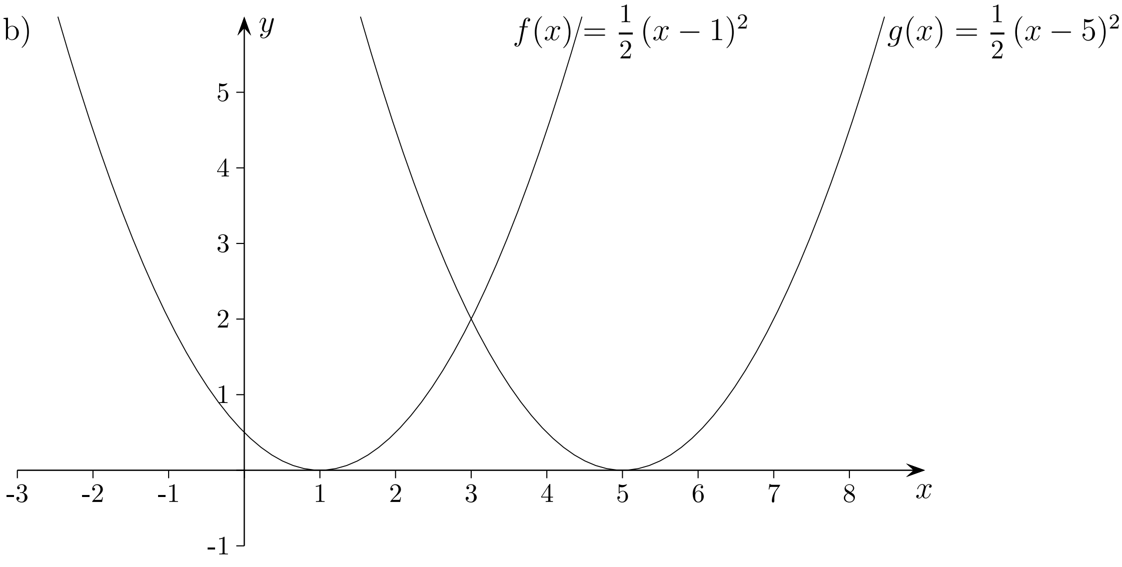
Produkte

Skizziere den Graphen des Produkts.

a)



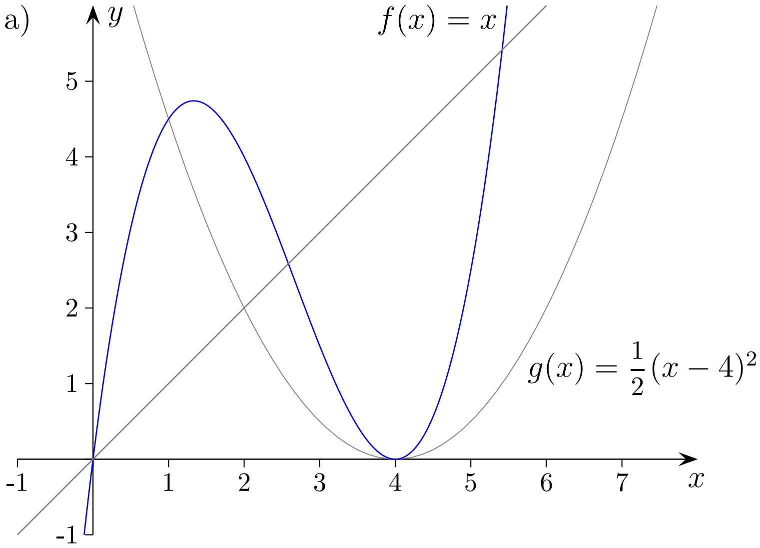
b)



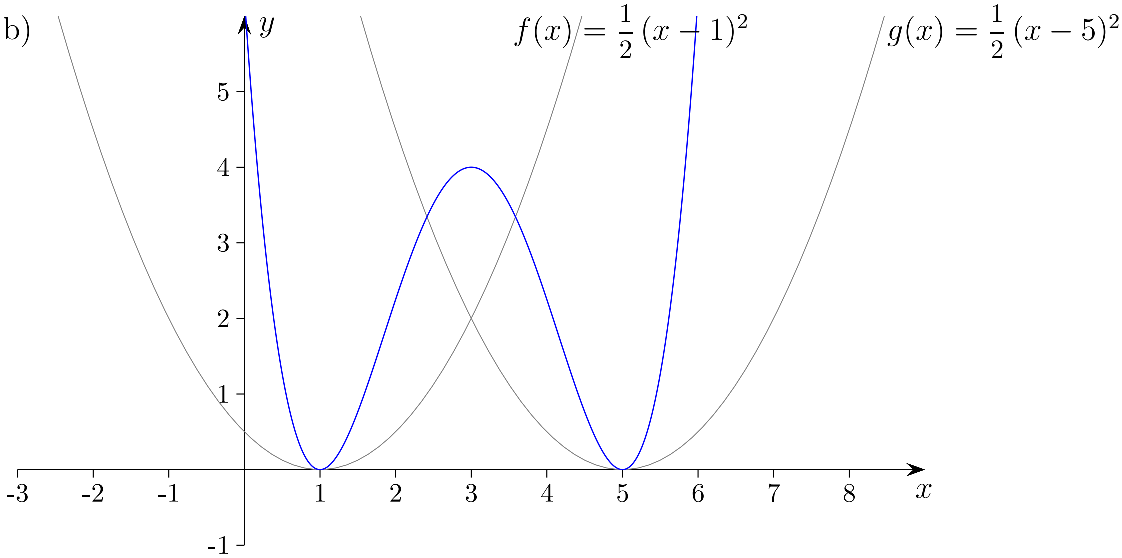
Produkte

Skizziere den Graphen des Produkts $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a)



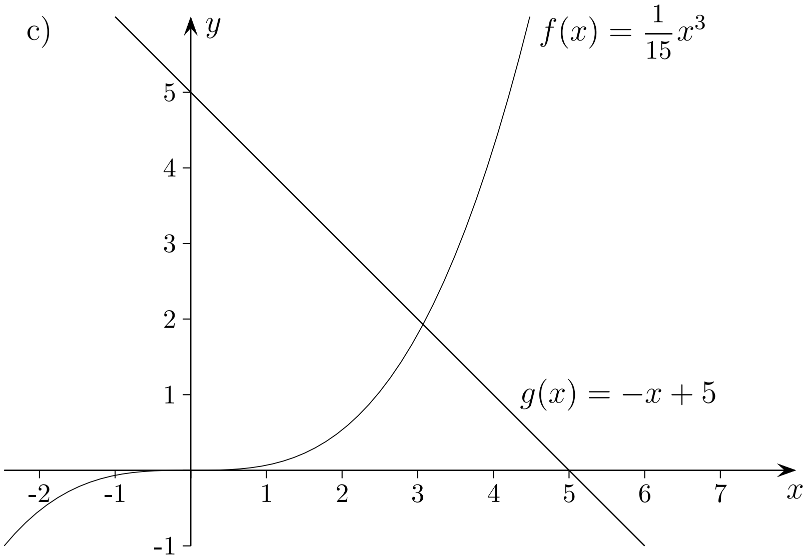
b)



Produkte

Skizziere den Graphen des Produkts.

c)



Produkte

Skizziere den Graphen des Produkts $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.