Funktionenschar

Der Funktionsterm von

$$f_k(x) = 3x^2 - \frac{3}{k}x^3$$

enthält neben der Variablen x noch eine weitere Variable k, die Formvariable oder der Parameter.
Zu jedem möglichen Wert von k gehört eine Funktion.

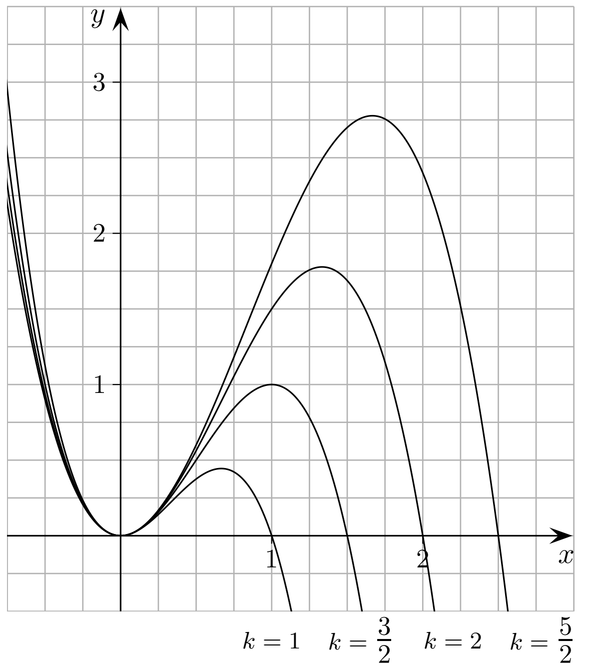
$k = 1$ ergibt die Funktion $f_1(x) = 3x^2 - 3x^3$,

$k = \frac{3}{2}$ $\quad f_{\frac{3}{2}}(x) = 3x^2 - 2x^3$,

$k = 2$ $\quad f_2(x) = 3x^2 - \frac{3}{2}x^3$.

Die Funktionen bilden eine Funktionenschar, ihre Graphen eine Kurvenschar.

Für die Funktionenschar kann eine Kurvendiskussion durchgeführt werden.



Nullstellen:

$$\begin{aligned} \textit{Bed.:}\quad f_k(x) &= 0 \\ 3x^2 - \frac{3}{k}x^3 &= 0 \\ 3x^2\,(1 - \frac{x}{k}) &= 0 \\ x_1 &= 0,\ \ x_2 = k \end{aligned}$$

$N_1(0 \mid 0), \quad N_2(k \mid 0)$

Weiter erhalten wir:

Min$(0 \mid 0)$, $\quad Max\left(\frac{2}{3}k \mid \frac{4}{9}k^2\right)$, $\quad W\left(\frac{k}{3} \mid \frac{2}{9}k^2\right)$

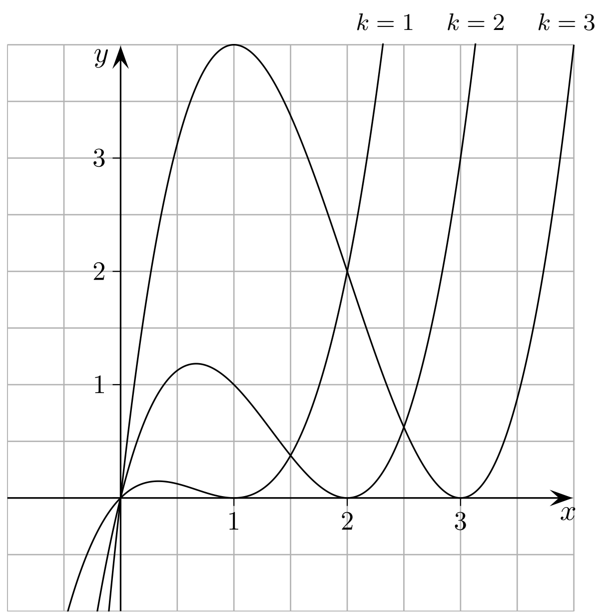
beachte: $\quad f_k''(0) = 6 > 0, \quad f_k''(\frac{2}{3}k) = -6 < 0$

Aufgabe:

Gegeben sei die Funktionenschar

$$f_a(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x, \quad a > 0$$

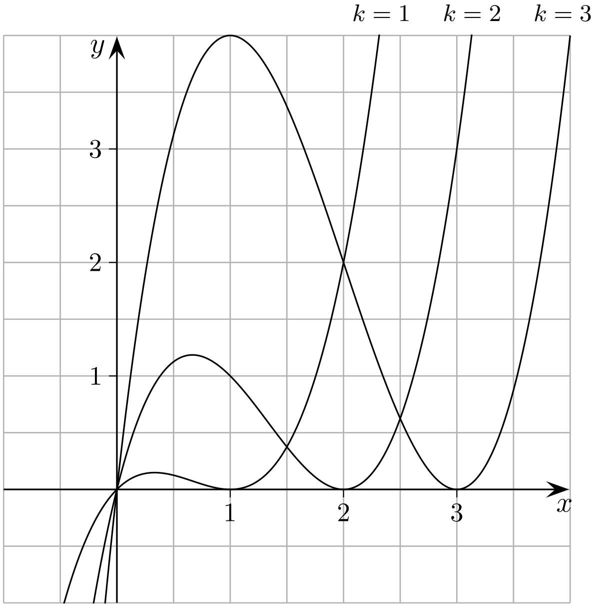
Führe eine Kurvendiskussion durch.



Funktionenschar

Gegeben sei die Funktionenschar

$f_a(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x, \quad a > 0$



Kurvendiskussion: $N_1(0 \mid 0)$, $N_2\ (a \mid 0)$

$Min(a \mid 0)$, $Max\left(\frac{a}{3} \mid \frac{4}{27}a^3\right)$, $W\left(\frac{2}{3}a \mid \frac{2}{27}a^3\right)$

$a = 1:$ $N_1(0 \mid 0)$, $N_2(1 \mid 0)$, $Min(1 \mid 0)$, $Max\left(\frac{1}{3} \mid \frac{4}{27}\right)$, $W\left(\frac{2}{3} \mid \frac{2}{27}\right)$

$a = 2:$ $N_1(0 \mid 0)$, $N_2(2 \mid 0)$, $Min(2 \mid 0)$, $Max\left(\frac{2}{3} \mid \frac{32}{27}\right)$, $W\left(\frac{4}{3} \mid \frac{16}{27}\right)$

Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^4 - kx^2 + 2, \quad k > 0.$

a) Zeichne die Graphen der Funktionen für $k = 1, 2, 3, 4.$
Welche Symmetrie liegt vor?

b) Gibt es einen Punkt, der auf allen Graphen der Funktionenschar liegt? (Nachweis)

c) Ermittle für allgemeines k die Extrema (x- und y-Koordinaten, Min., Max.).

d) Gibt es einen Wert für k, so dass ein Minimum auf der x-Achse liegt?

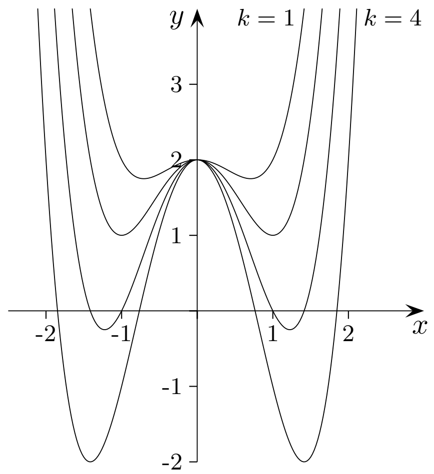
e) Gibt es einen Wert für k, so dass ein Minimum auf der Geraden $y = x$ liegt?

f) Wie hängt die Anzahl der Nullstellen von k ab?

Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^4 - kx^2 + 2, \quad k > 0.$

a) Zeichne die Graphen der Funktionen für $k = 1, 2, 3, 4.$
Welche Symmetrie liegt vor? y-Achsensymmetrie



b) Gibt es einen Punkt, der auf allen Graphen der Funktionenschar liegt? (Nachweis) $P(0 \mid 2)$, $f_k(0) = 2$

c) Ermittle für allgemeines k die Extrema (x- und y-Koordinaten, *Min.*, *Max.*).

$$Max(0 \mid 2), \quad Min_{1/2}\left(\pm\sqrt{\frac{k}{2}} \mid 2 - \frac{k^2}{4}\right)$$

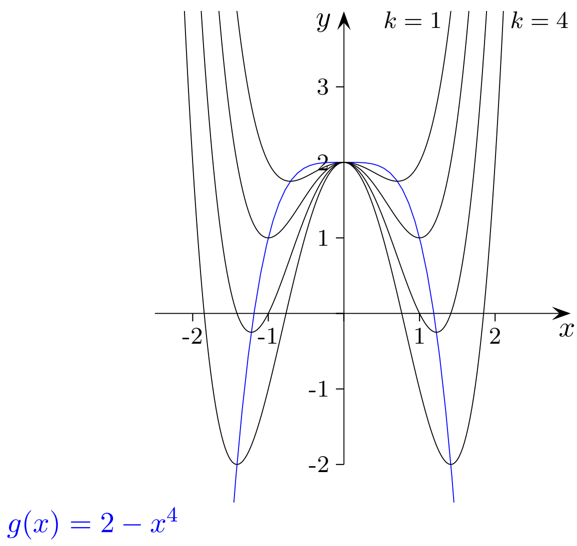
d) Gibt es einen Wert für k, so dass ein Minimum auf der x-Achse liegt? $k = 2\sqrt{2}$

e) Gibt es einen Wert für k, so dass ein Minimum auf der Geraden $y = x$ liegt? $k = 2$

f) Wie hängt die Anzahl der Nullstellen von k ab?

$k < 2\sqrt{2}$ keine Nullstellen
$k = 2\sqrt{2}$ 2 Nullstellen
$k > 2\sqrt{2}$ 4 Nullstellen

g) Auf welcher Kurve liegen die Minima?



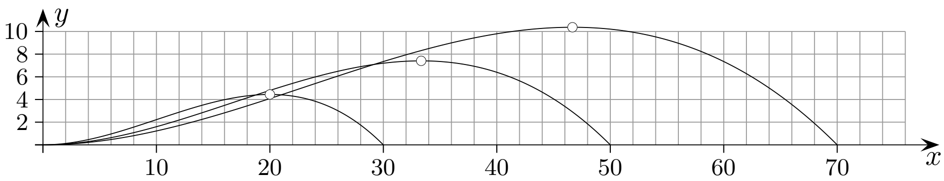
y
$k = 1$
$k = 4$
3
2
1
-1
-2
-2
-1
1
2
x
$g(x) = 2 - x^4$

Deichquerschnitte

Querschnitte von Deichen werden durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = -\frac{1}{k^2}x^3 + \frac{1}{k}x^2, \quad k > 0$$

modelliert (x und $f_k(x)$ in m).



a) Bestimme für die Funktionenschar die Nullstellen und den Hochpunkt und ordne die Graphen ihrem jeweiligen k zu.

b) Untersuche, ob die drei Hochpunkte (siehe Grafik) auf einer Geraden liegen.

c) Überprüfe, ob die Steigung der Graphen der Funktionenschar in den Nullstellen von k abhängig ist.

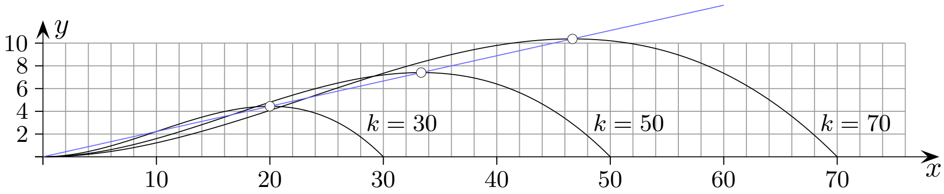
d) Schätze grob ab, wie viel m^3 Material für $1\,km$ Deich, k sei 50, gebraucht wird.

Deichquerschnitte

Querschnitte von Deichen werden durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = -\frac{1}{k^2}x^3 + \frac{1}{k}x^2, \quad k > 0$$

modelliert (x und $f_k(x)$ in m).



a) Bestimme für die Funktionenschar die Nullstellen und den Hochpunkt und ordne die Graphen ihrem jeweiligen k zu.

$x_{N_1} = 0,\ x_{N_2} = k$

$H\left(\frac{2}{3}k \mid \frac{4}{27}k\right)$

k stimmt mit der 2. Nullstelle überein.

b) Untersuche, ob die drei Hochpunkte (siehe Grafik) auf einer Geraden liegen. $y = \frac{2}{9}x$

c) Überprüfe, ob die Steigung der Graphen der Funktionenschar in den Nullstellen von k abhängig ist.

$f_k'(0) = 0,\ f_k'(k) = -1$

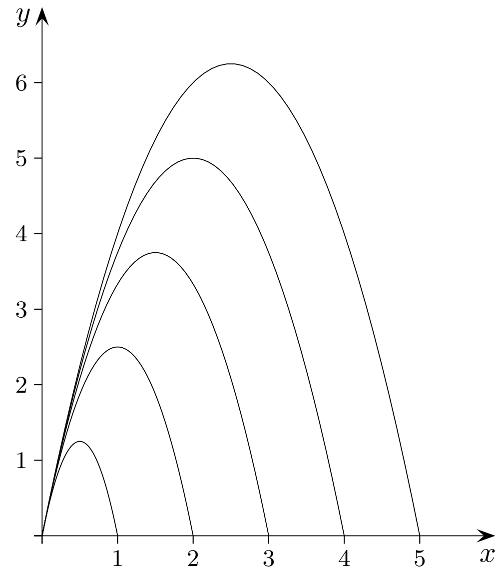
d) Schätze grob ab, wie viel m^3 Material für $1\,km$ Deich, k sei 50, gebraucht wird. $200000\,m^3$

Fontänen

Die Fontänen eines Springbrunnens werden durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = -kx^2 + 5x, \quad k > 0$$

modelliert. Der Parameter k hängt vom Wasserdruck ab.
Alle Einheiten sind Meter.



a) Welche Beziehung besteht zwischen der rechten Nullstelle einer Fontäne und dem Parameter k?

b) In welchem Winkel wird das Wasser der Fontänen ausgestoßen?

c) Entlang welcher Kurve bewegt sich das Maximum der Fontäne, wenn man das Wasser langsam aufdreht?

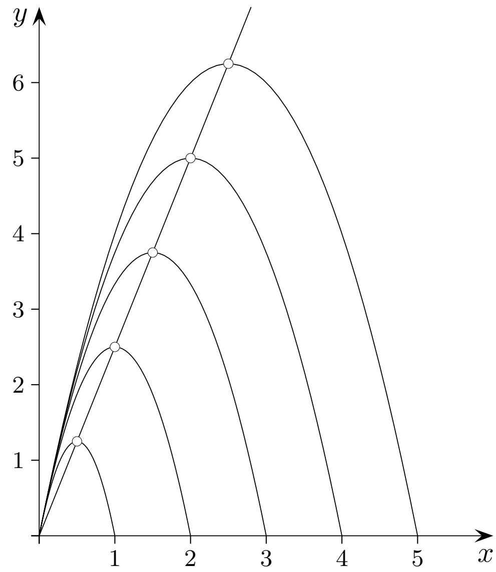
d) In welchem Bereich liegt der Parameter k, falls die Höhen der Fontänen $1\,m$ nicht unterschreiten und $2\,m$ nicht überschreiten.

Fontänen

Die Fontänen eines Springbrunnens werden durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = -kx^2 + 5x, \quad k > 0$$

modelliert. Der Parameter k hängt vom Wasserdruck ab.
Alle Einheiten sind Meter.



a) Welche Beziehung besteht zwischen der rechten Nullstelle einer Fontäne und dem Parameter k?
$x_{N2} = \frac{5}{k}$

b) In welchem Winkel wird das Wasser der Fontänen ausgestoßen? $f_k'(0) = 5, \;\; \alpha = 78{,}7^\circ$

c) Entlang welcher Kurve bewegt sich das Maximum der Fontäne, wenn man das Wasser langsam aufdreht? $Max\left(\frac{5}{2k} \mid \frac{25}{4k}\right), \;\; y = \frac{5}{2}x$

d) In welchem Bereich liegt der Parameter k, falls die Höhen der Fontänen $1\,m$ nicht unterschreiten und $2\,m$ nicht überschreiten. $[\frac{25}{8}, \frac{25}{4}]$