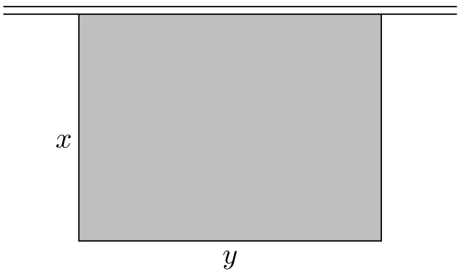
↑ Extremwertaufgaben



1. Ein Landwirt will an einer Mauer einen rechteckigen Hühnerhof mit Maschendraht abgrenzen. 20 Meter Maschendraht stehen zur Verfügung. Wie groß müssen die Rechteckseiten gewählt werden, damit die Hühner möglichst viel Platz haben?

   Falls wir z. B. $x = 2\ m$ wählen, so ist y durch die Nebenbedingung $2x + y = 20$ schon eindeutig festgelegt ($y = 16\ m$) und damit auch der Flächeninhalt ($A = 32\ m^2$).
   Jeder Seitenlänge x ist der Flächeninhalt A zugeordnet, die Funktion lautet: $A(x) = x \cdot (20 - 2x)$.
   Mit der Differentialrechnung ermitteln wir den Extremwert: $x = 5$ und den maximalen Flächeninhalt $A = 50$ (Zwischenergebnis: $A'(x) = 20 - 4x$).

   Zur Lösung von Extremwertaufgaben sind im allgemeinen folgende Schritte durchzuführen:

   1. *Skizze mit Bezeichnungen der Variablen anfertigen,*
   2. *Zusammenhang zwischen der Größe, die extrem werden soll, und den Variablen aufstellen (Zielfunktion),*
   3. *Beziehung zwischen den Variablen in Form einer Gleichung aufstellen (Nebenbedingung),*
   4. *die Nebenbedingung nach einer Variablen umstellen und in die Zielfunktion einsetzen, so dass sie nur noch von einer Variablen abhängig ist,*
   5. *den Extremwert der Zielfunktion mit der Differentialrechnung bestimmen.*

2. Welche Maße besitzt ein Quader mit quadratischer Grundfläche und der Oberfläche $24\ m^2$, wenn das Volumen maximal sein soll?

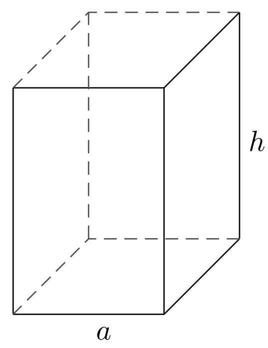
3. Ein Gewölbegang hat einen Querschnitt von der Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang des Querschnitts ist durch $U = 10\ m$ fest vorgegeben. Wie muss das Gewölbe gestaltet werden, damit die Querschnittsfläche möglichst groß wird?

4. Von einer Kaffeesorte werden bei einem Preis von 20 € für 1 kg im Monat 10000 kg verkauft. Eine Marktforschung hat ergeben, dass eine Preissenkung von 0,02 € je kg jeweils zu einer Absatzsteigerung von 100 kg im Monat führen würde. Bei welchem Verkaufspreis wäre der Gewinn maximal, wenn für 1 kg Kaffee der Selbstkostenpreis 14 € beträgt?

5. Welche Form hat eine Konservendose von 1 l Inhalt, deren Oberfläche minimal ist?

↑ Extremwertaufgaben

2. Welche Maße besitzt ein Quader mit quadratischer Grundfläche und der Oberfläche 24 m^2, wenn das Volumen maximal sein soll?

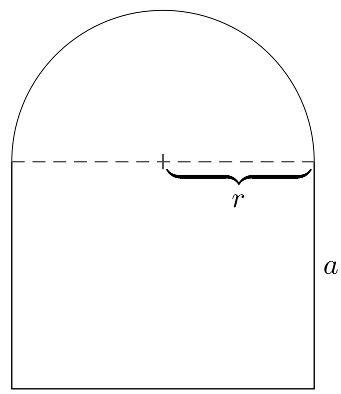


$V = a^2 \cdot h$ *(Zielfunktion)*

$O = 2a^2 + 4ah$ *(Nebenbedingung)*

$V(a) = 6a - \frac{1}{2}a^3$; $\qquad a = h = 2\ (m)$

3. Ein Gewölbegang hat einen Querschnitt von der Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang des Querschnitts ist durch $U = 10\ m$ fest vorgegeben. Wie muss das Gewölbe gestaltet werden, damit die Querschnittsfläche möglichst groß wird?



$Q = 2ra + \frac{1}{2}\pi r^2$ *(Zielfunktion)*

$2r + 2a + \pi r = 10$ *(Nebenbedingung)*

$Q(r) = 10r - (2 + \frac{1}{2}\pi)\, r^2$

$r = \dfrac{10}{4+\pi} = 1{,}40\ (m)$

$a = 1{,}40\ (m)$

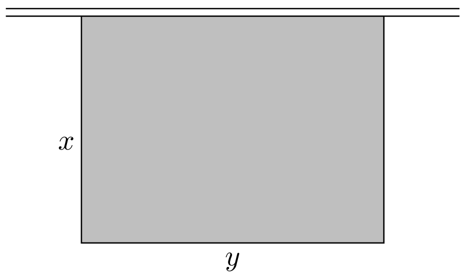
4. Von einer Kaffeesorte werden bei einem Preis von 20 € für 1 kg im Monat 10000 kg verkauft. Eine Marktforschung hat ergeben, dass eine Preissenkung von 0,02 € je kg jeweils zu einer Absatzsteigerung von 100 kg im Monat führen würde. Bei welchem Verkaufspreis wäre der Gewinn maximal, wenn für 1 kg Kaffee der Selbstkostenpreis 14 € beträgt?

$f(x) = (20 - 0{,}02 \cdot x - 14) \cdot (10000 + 100 \cdot x)$

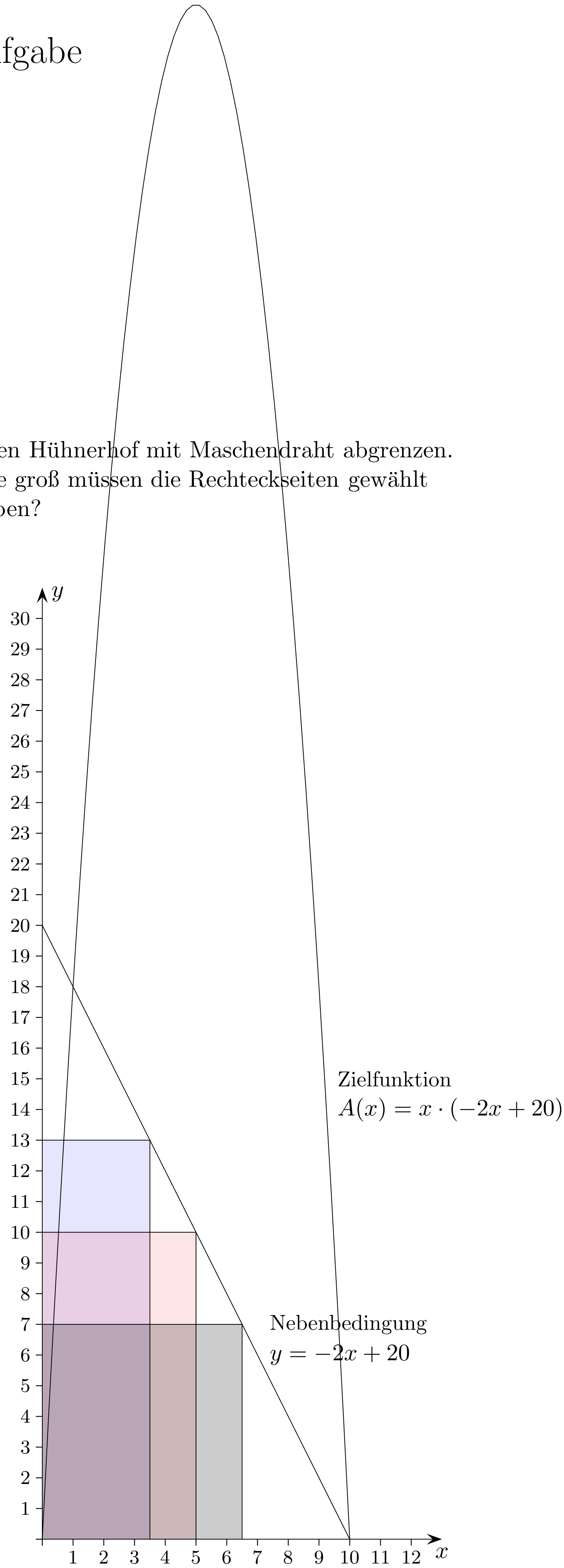
$x = 100$

18 €

↑ Hühnerhof-Aufgabe

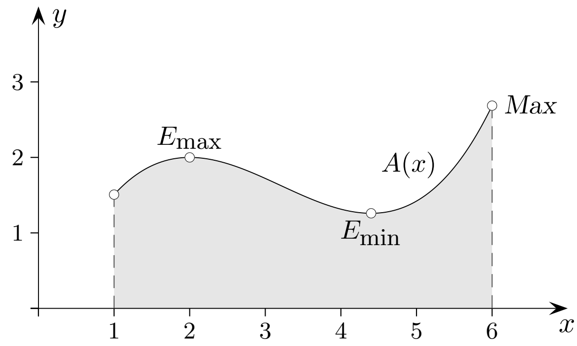


Ein Landwirt will an einer Mauer einen rechteckigen Hühnerhof mit Maschendraht abgrenzen. 20 Meter Maschendraht stehen zur Verfügung. Wie groß müssen die Rechteckseiten gewählt werden, damit die Hühner möglichst viel Platz haben?



Es kann erhellend sein,
die Nebenbedingung grafisch darzustellen.

↑ Randextrema

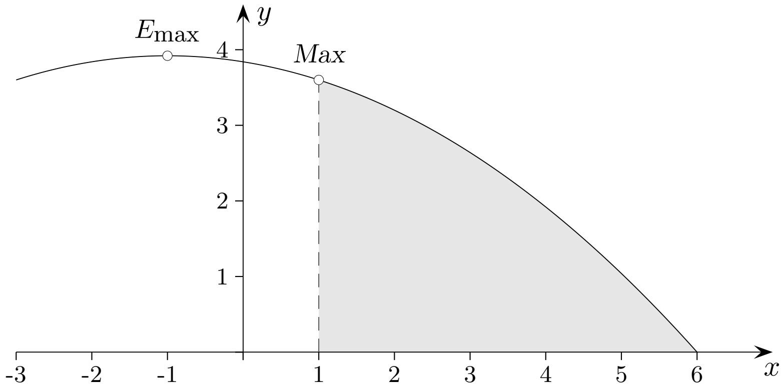


In Extremwertaufgaben wird der größte bzw. kleinste Funktionswert auf einem Intervall gesucht. Mit der Differentialrechnung können die lokalen Extrema E_{max} und E_{min} ermittelt werden.
Es bleibt zu prüfen, ob am Rand des Definitionsbereichs noch größere bzw. kleinere Funktionswerte vorliegen.

Wie befinden sich die globalen Extrema der Funktion $A(x),\ 1 \leq x \leq 6$?

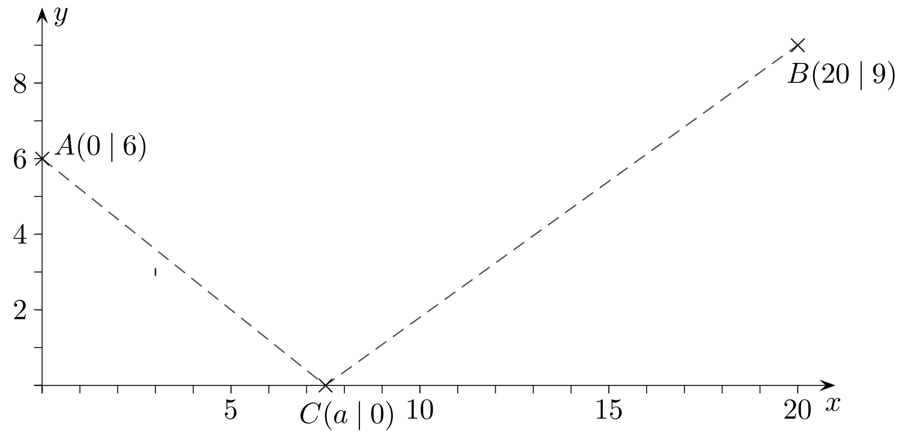
Das globale Maximum ist *Max*, das globale Minimum stimmt mit dem lokalen E_{min} überein.

Das Maximum der Funktionswerte wird z. B. auf dem Rand angenommen, wenn das einzige lokale Maximum außerhalb des Definitionsbereichs liegt.



↑ Kürzeste Wege

6. Gesucht ist der Punkt C auf der x-Achse,
   so dass der Weg ACB minimal wird.



   Sei A^* der Spiegelpunkt von A bezüglich der x-Achse.
   Berechne den Schnittpunkt der Geraden A^*B mit der x-Achse.
   Was fällt dir auf? Erläutere dies.

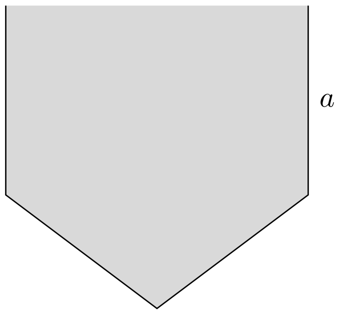
7. Variation der 6. Aufgabe
   $A(0\,|\,4),\ B(18\,|\,8)$

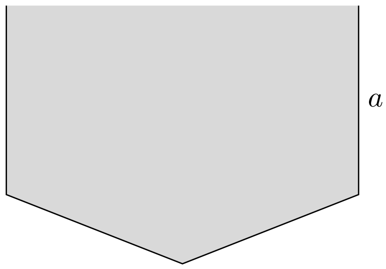
Ergebnisse

6. $C(8\,|\,0)$
7. $C(6\,|\,0)$

↑ Dachrinne

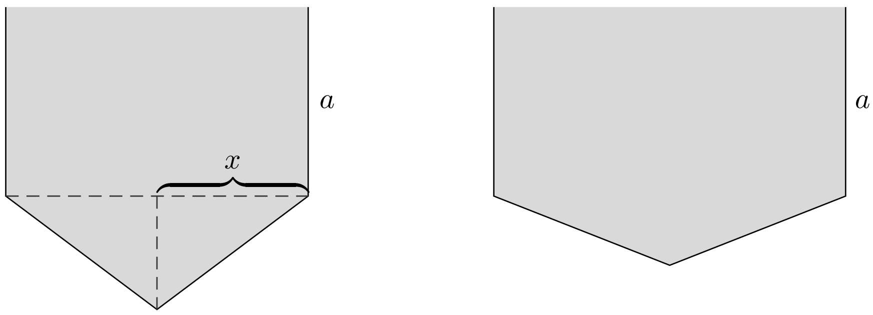
8. Aus 4 gleichbreiten Zinkstreifen mit $a = 5\ cm$ soll eine Dachrinne mit maximalem Fassungsvermögen hergestellt werden, wobei 2 Zinkstreifen senkrecht anzuordnen sind. Welche Querschnittsfläche hat die Dachrinne?





↑ Dachrinne

8. Aus 4 gleichbreiten Zinkstreifen mit $a = 5\ cm$ soll eine Dachrinne mit maximalem Fassungsvermögen hergestellt werden, wobei 2 Zinkstreifen senkrecht anzuordnen sind. Welche Querschnittsfläche hat die Dachrinne?



$Q(x) = 2ax + x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

$x_{max} = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\, a$

$Q_{max} = 55{,}046\ cm^2$

Das optimale Profil ist rechts zu sehen.

↑ Minimale Entfernung

9. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

   Ermitteln Sie den Punkt auf dem Graphen von f, der von $A(3 \mid 2)$ minimale Entfernung hat.

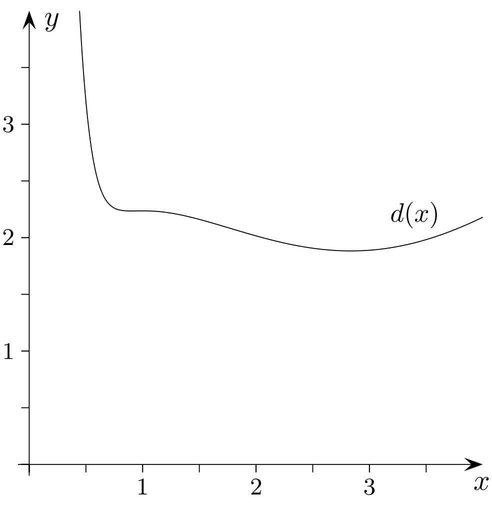
Lösung:

$d(x) = \sqrt{((3-x)^2 + (2-f(x))^2}$

$x_{min} = 2{,}835$

$y = 0{,}124$

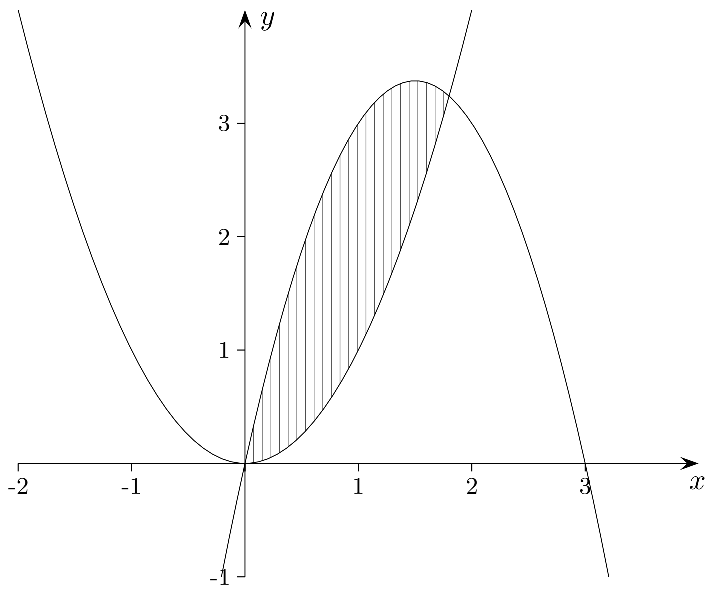
$d(x_{min}) = 1{,}883$



Bemerkenswert: $Min(\,0{,}900 \mid 2{,}235\,)$, $Max(\,1 \mid 2{,}236\,)$

↑ Maximale Entfernung

10. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = -\frac{3}{2}x(x-3)$.
    An welcher Stelle zwischen den beiden Schnittpunkten ist die Differenz der Funktionswerte maximal?



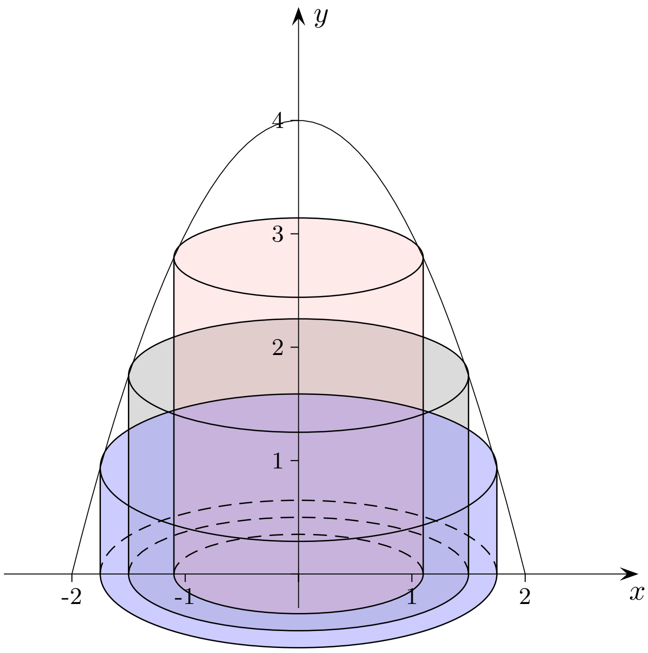
Lösung:

$x_{max} = 0{,}9$

$d(x_{max}) = 2{,}025$

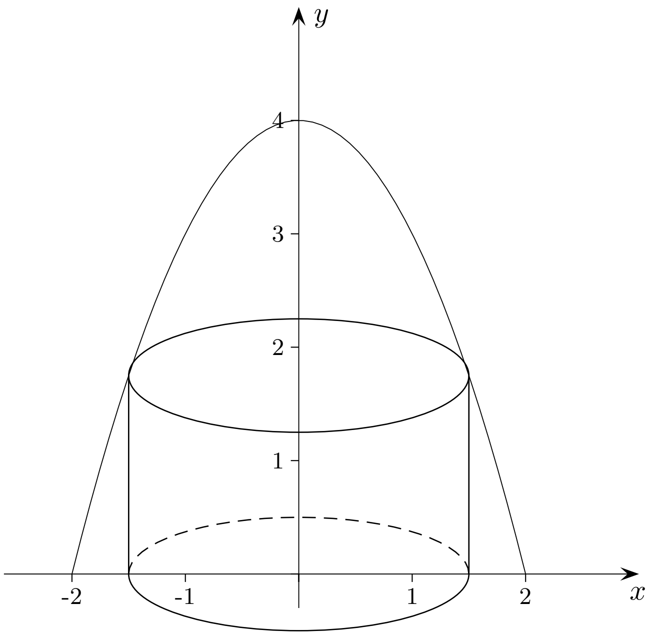
↑ Zylinder-Aufgabe

11. Welches maximale Volumen hat ein Zylinder,
    dessen Höhe durch die positiven Werte der Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ begrenzt wird?



↑ Zylinder-Aufgabe

11. Welches maximale Volumen hat ein Zylinder,
    dessen Höhe durch die positiven Werte der Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ begrenzt wird?

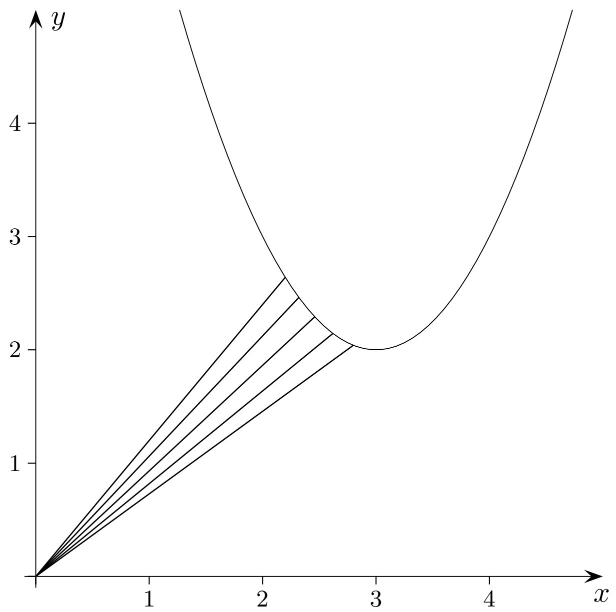


Ergebnis: 12,57 *VE*

↑ Minimale Entfernung

12. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x-3)^2 + 2$.

    Ermitteln Sie den Punkt P auf dem Graphen von f, der vom Ursprung minimale Entfernung hat. Überprüfen Sie, ob die Verbindungsstrecke minimaler Länge senkrecht zur Tangente in P verläuft.



Ergebnis:

$d(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$

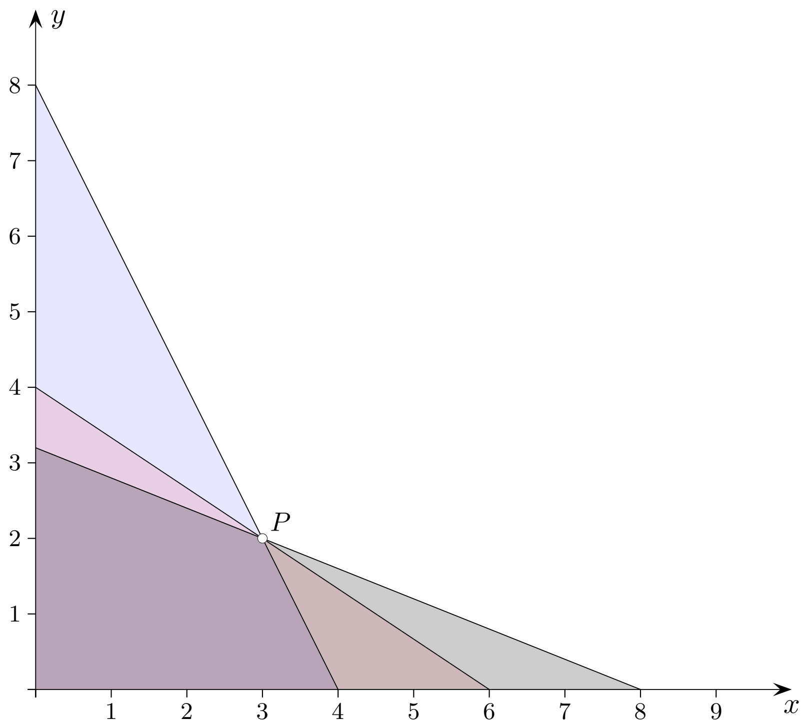
$P(2{,}462 \mid 2{,}289)$

$d(x_{min}) = 3{,}362$

$\frac{f(x_{min})}{x_{min}} = 0{,}930$

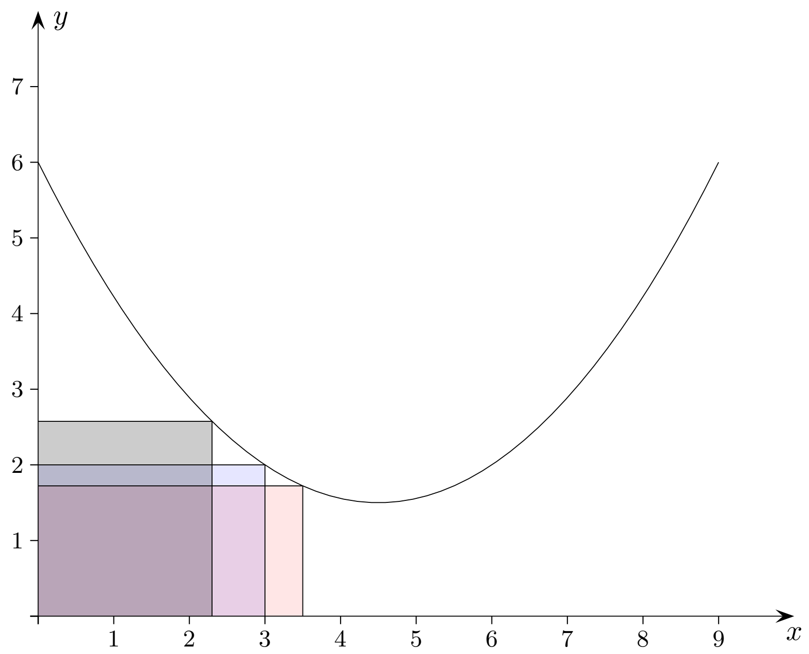
$f'(x_{min}) = -1{,}076$

↑ Minimales Dreieck



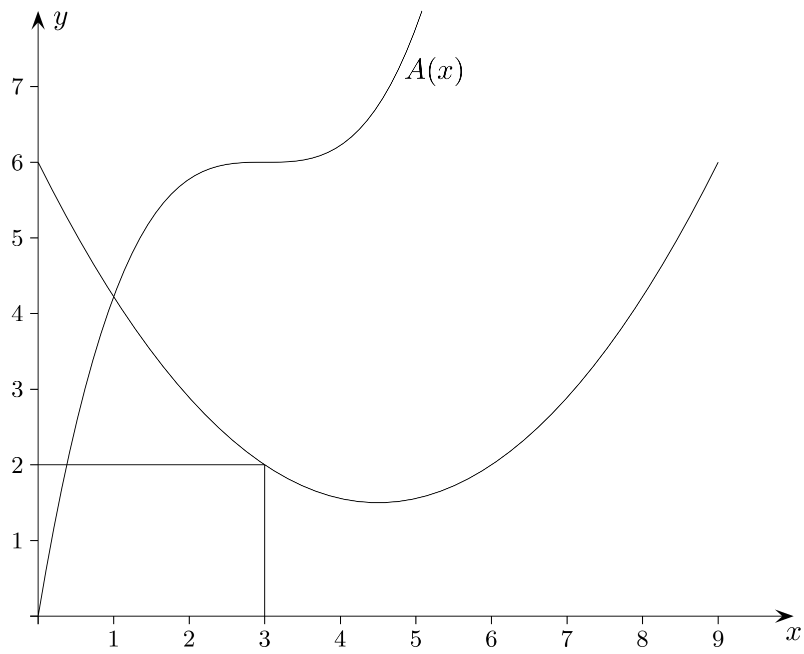
Welche Gerade durch P(3 | 2) schließt mit den positiven Koordinatenachsen ein Dreieck mit minimalem Flächeninhalt ein?
Die Begründung kann auch ohne Differentialrechnung erfolgen.

↑ Minimales Rechteck



Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2}{9}x^2 - 2x + 6$.
Welches Rechteck (diagonale Eckpunkte im Ursprung und auf dem Graphen, siehe Grafik) hat minimalen Flächeninhalt?

↑ Minimales Rechteck



Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2}{9}x^2 - 2x + 6$.
Welches Rechteck (diagonale Eckpunkte im Ursprung und auf dem Graphen, siehe Grafik) hat minimalen Flächeninhalt?

$A(x) = x \cdot f(x)$

$A'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$

Es gibt jedoch kein Extremum an der Stelle $x = 3$ (Sattelstelle).

↑ Verkaufspreis

13. Das Produkt T des Herstellers A konkurriert mit anderen Produkten von nahezu gleicher Qualität und Beschaffenheit. Der tägliche Absatz (Stückzahl) von T wird durch

$$f_a(x) = 220 - 14x + 8a, \quad 10 \leq x \leq 20, \;\; 10 \leq a \leq 20,$$

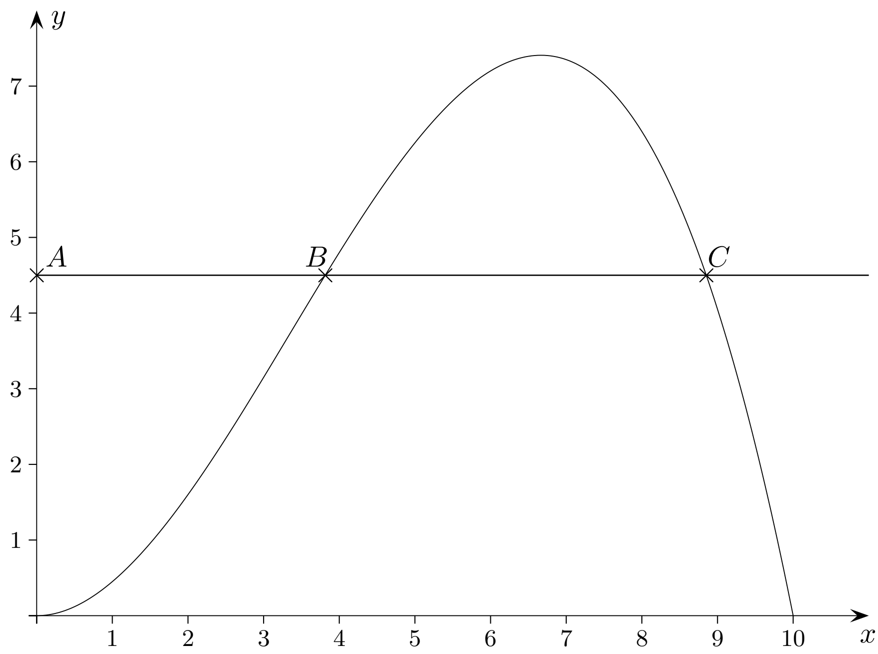
erfasst, x ist der Stückpreis von T, a ist der durchschnittliche Marktpreis der ähnlichen Produkte.

a) Wie wirken sich Preiserhöhungen von x und a auf den Absatz aus?

b) Die Stückkosten von T betragen 5 €. Sei $a = 18$ € (16 €).
Wie wird A seinen Verkaufspreis festlegen?

15,50 € (14,93 €)

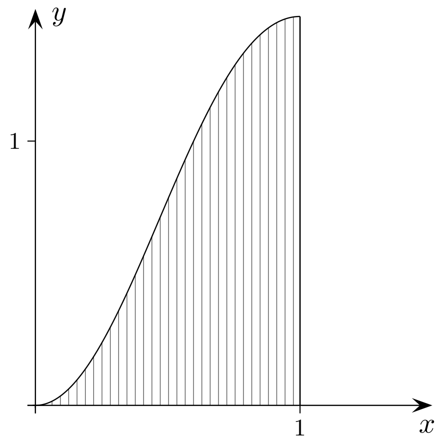
↑ Gleiche Abschnitte



14. Der Graph von $f(x) = -\frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ wird von einer Parallele zur x-Achse im 1. Quadranten in B und C geschnitten. Für welchen Punkt A auf der y-Achse halbiert B die Strecke $\overline{AC}$?

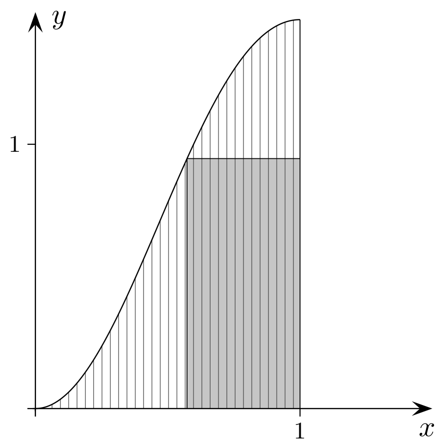
$f(x) = f(2x),\ \ y = f(\frac{30}{7}) = 5{,}248$

↑ Maximaler Flächeninhalt (11. Jg)



15. Gegeben ist die Funktion: $f(x) = 4 \cdot x^2 \cdot e^{-x^2}$
    In die schraffierte Fläche soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt gelegt werden.
    Ermittle diesen Flächeninhalt.

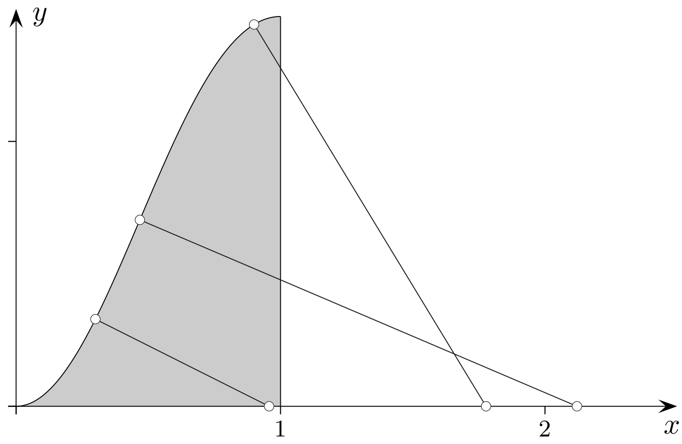
Gegeben ist die Funktion: $f(x) = 4 \cdot x^2 \cdot e^{-x^2}$
In die schraffierte Fläche soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt gelegt werden. Ermittle diesen Flächeninhalt.



$A(x) = (1 - x) \cdot f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$
$x_{\text{max}} = 0{,}573$
$A_{\text{max}} = 0{,}404 \; FE$

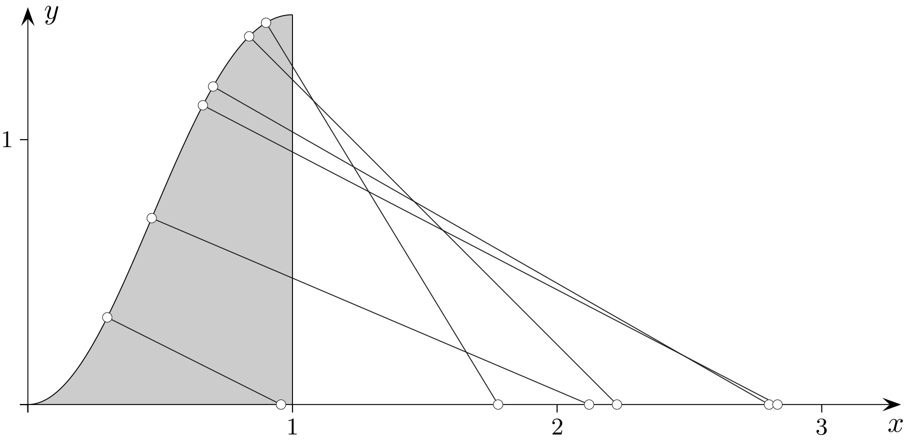
x_{max} stimmt nicht mit der Wendestelle $x_{\text{w}} = 0{,}468$ überein.

↑ Stütze mit maximaler Länge (12. Jg)



16. Gegeben ist die Funktion: $f(x) = 4 \cdot x^2 \cdot e^{-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$
Das Kurvenstück soll durch eine senkrecht verlaufende Strecke maximaler Länge unterstützt werden.
Ermittle diese Länge.

↑ Stütze mit maximaler Länge (12. Jg)

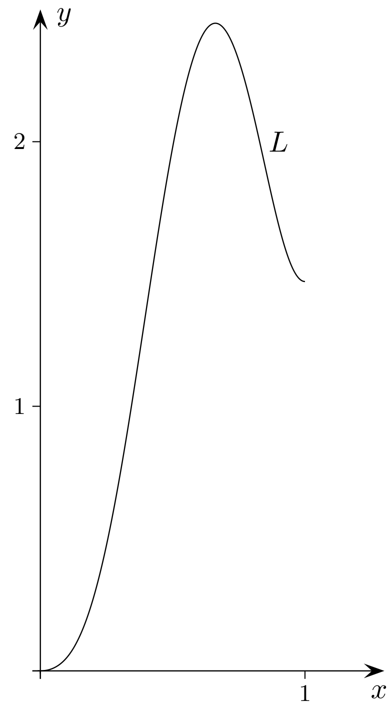


Gegeben ist die Funktion: $f(x) = 4 \cdot x^2 \cdot e^{-x^2}, \;\; 0 \leq x \leq 1$
Das Kurvenstück soll durch eine senkrecht verlaufende Strecke maximaler Länge unterstützt werden.
Ermittle diese Länge.

$L(x) = f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$

Zwischenschritte:
allgemein Normalengleichung aufstellen,
Nullstelle der Normalen berechnen $x_N = f(x_0) \cdot f'(x_0) + x_0$,
Länge (Pythagoras) ermitteln,
umformen

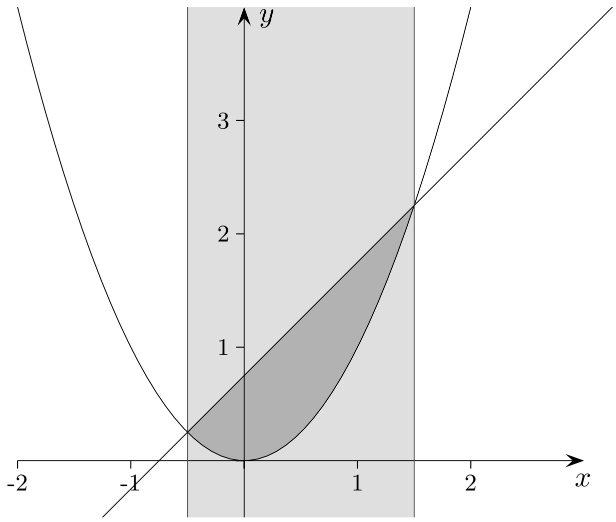
$x_{\text{max}} = 0{,}661$
$L_{\text{max}} = 2{,}448 \; LE$



Für x_{max} wird die Nullstelle der Normalen maximal.
Die Gleichungen $(L^2(x))' = 0$ und $(f(x) \cdot f'(x) + x)' = 0$ sind für $0 < x < 1$ äquivalent.

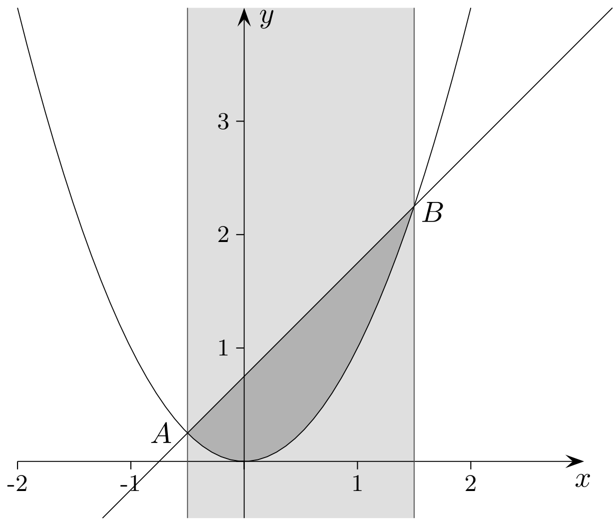
↑ Maximales Parabelsegment (11. Jg)

Gegeben ist die Normalparabel $f(x) = x^2$.
Ein zur y-Achse paralleler Streifen der Breite $b = 2$ wandert auf der x-Achse entlang und legt damit ein Parabelsegment fest. Für welchen Streifen ist die Fläche des Segments maximal?



↑ Maximales Parabelsegment

Gegeben ist die Normalparabel $f(x) = x^2$.
Ein zur y-Achse paralleler Streifen der Breite $b = 2$ wandert auf der x-Achse entlang und legt damit ein Parabelsegment fest. Für welchen Streifen ist die Fläche des Segments maximal?



Lösung:

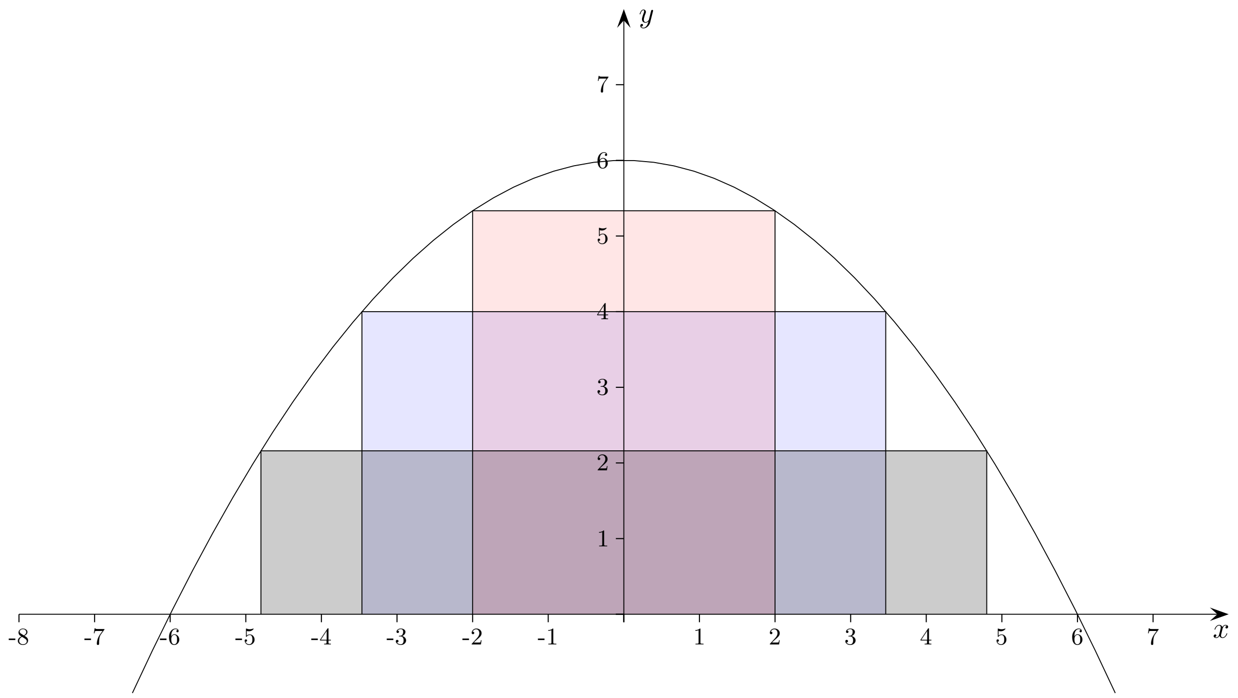
$A\big(u \mid u^2\big)$, $B\big(u+b \mid (u+b)^2\big)$

Sekante $y = (2u+b)x - u(u+b)$ Die Betrachtung eines Trapezes reicht.

$A = \frac{1}{6}b^3$

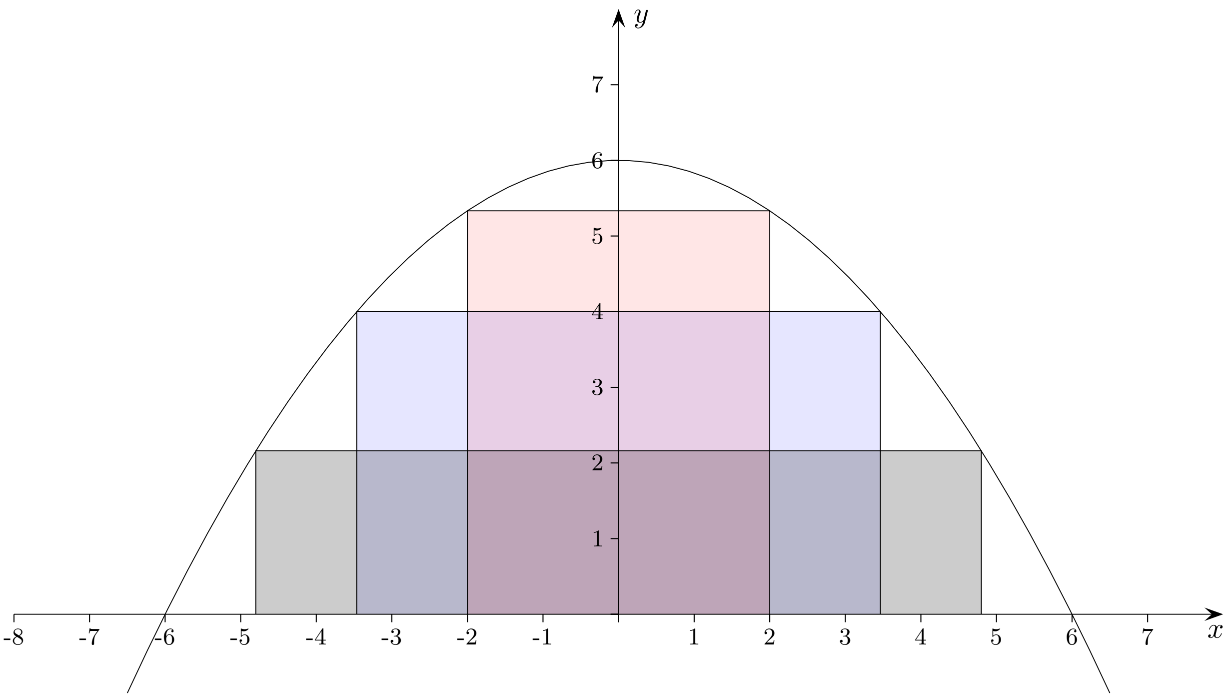
Alle Segmente sind gleich groß.

↑ Maximales Rechteck



Gegeben ist die Funktion $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$.
Welches einbeschriebene Rechteck (Seiten parallel zu den Koordinatenachsen, siehe Grafik) hat maximalen Flächeninhalt?

↑ Maximales Rechteck

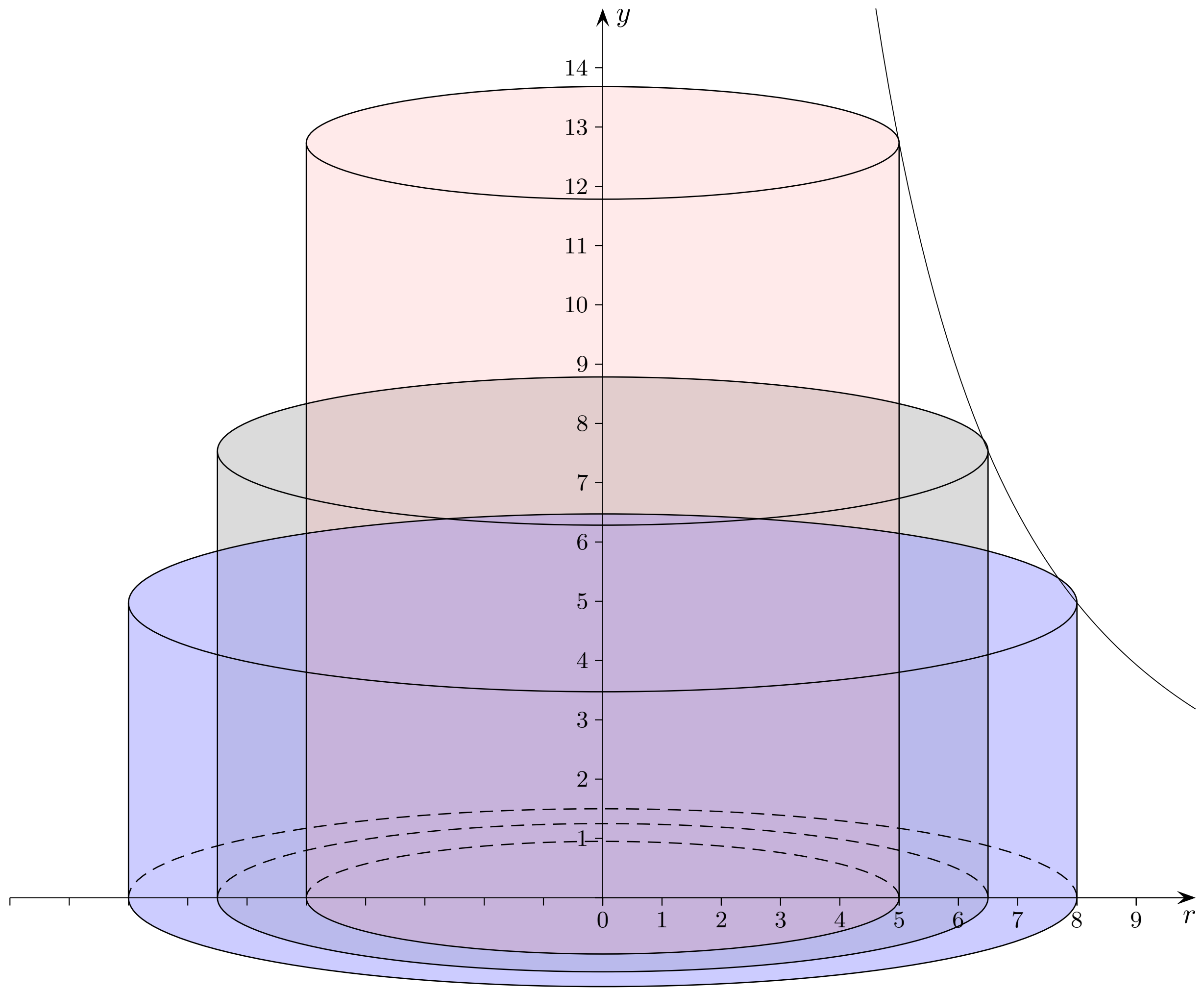


Gegeben ist die Funktion $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$.
Welches einbeschriebene Rechteck (Seiten parallel zu den Koordinatenachsen, siehe Grafik) hat maximalen Flächeninhalt?

$a = 4\sqrt{3} = 6{,}928,\ b = 4$
$A_{\max} = 27{,}713\ FE$

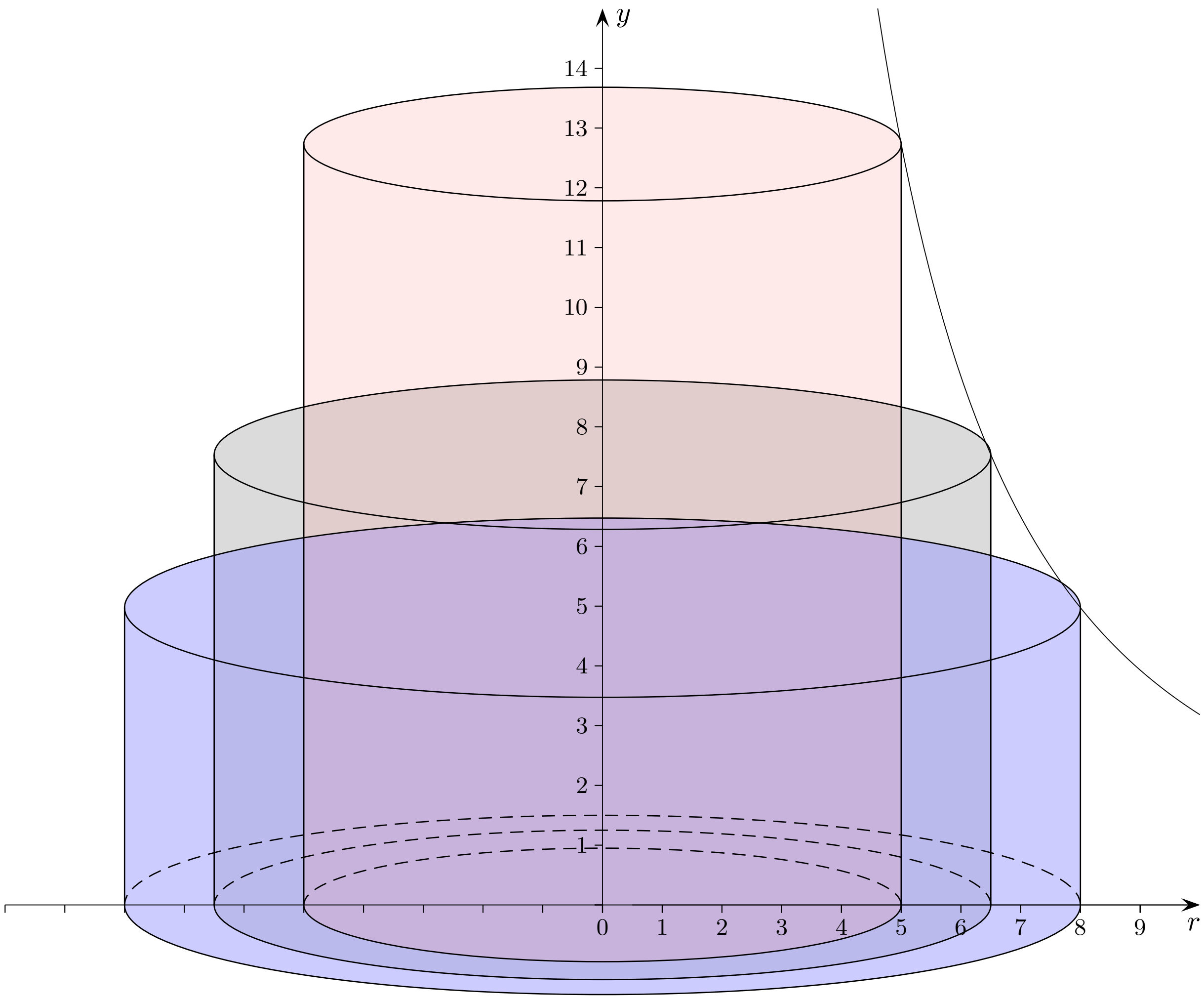
↑ Dosen-Aufgabe

Welcher Zylinder (Radius r, Höhe h) mit dem Volumen $V = 1000\,cm^3$ hat minimale Oberfläche?



↑ Dosen-Aufgabe

Welcher Zylinder (Radius r, Höhe h) mit dem Volumen $V = 1000\,cm^3$ hat minimale Oberfläche?

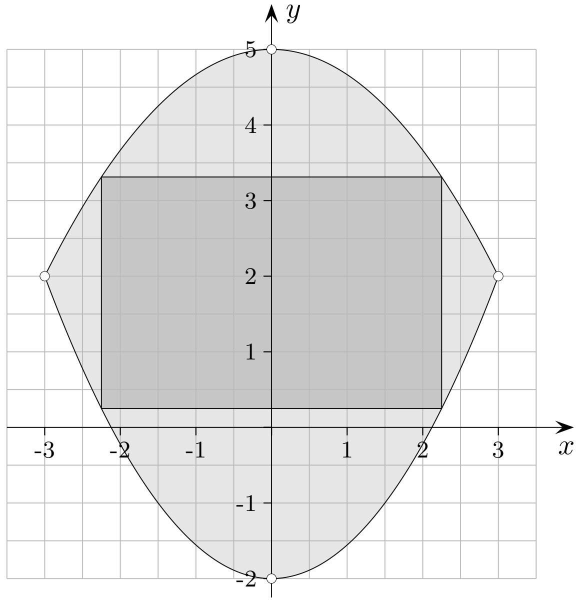


Die Zylinderhöhen werden durch die Funktion $h(r) = \dfrac{1000}{\pi r^2}$ bestimmt.

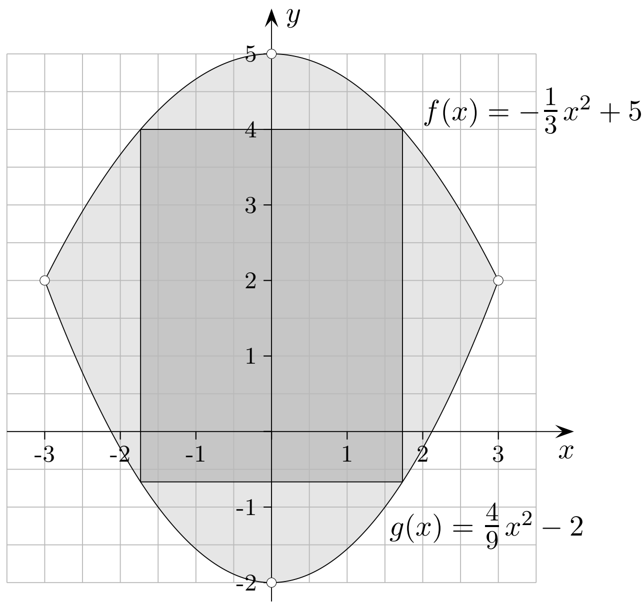
Es ist das Minimum der Funktion $\mathit{Oberfläche}(r) = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = \dfrac{2000}{r} + 2\pi r^2$ zu ermitteln.

Ergebnis: $r = 5{,}42 \quad (= \frac{h}{2})$

In das durch Parabelbögen begrenzte Flächenstück wird ein achsenparalleles Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A einbeschrieben. Ermittle A.



In das durch Parabelbögen begrenzte Flächenstück wird ein achsenparalleles Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A einbeschrieben. Ermittle A.

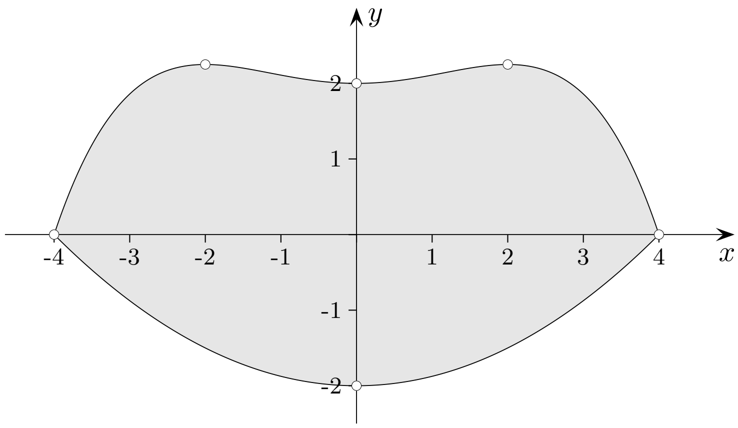


$A(x) = (f(x) - g(x)) \cdot 2x = -\frac{14}{9}x^3 + 14x, \quad 0 < x < 3$

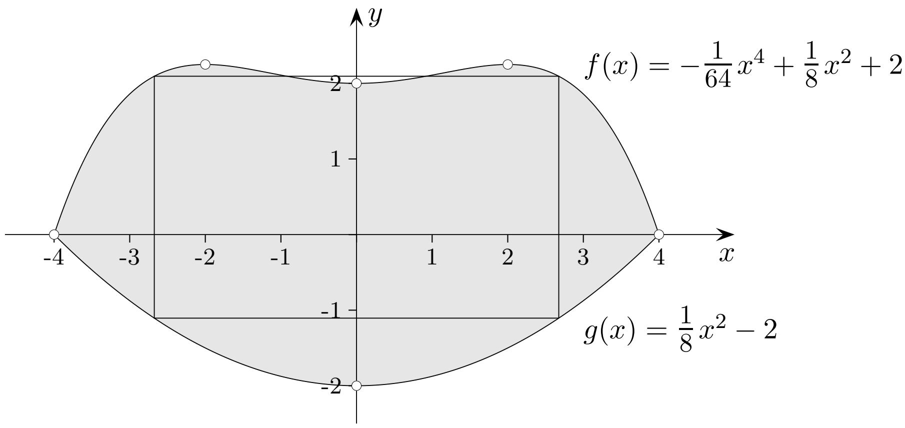
$x_{\max} = \sqrt{3} = 1{,}732$

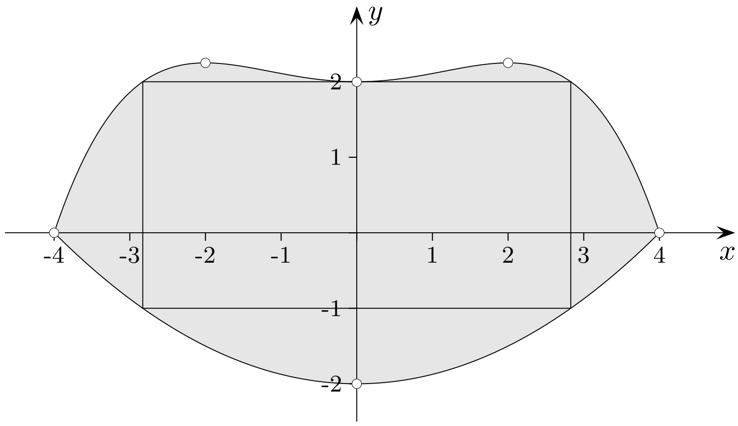
$A_{\max} = 16{,}17$

Für eine Kosmetikfirma soll ein Werbebanner entworfen werden.
Die Modellierung soll mit möglichst einfachen Funktionen und ganzzahligen Koordinatenwerten erfolgen, siehe Zeichnung.
In das Flächenstück soll für einen Werbetext ein achsenparalleles Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A einbeschrieben werden. Ermittle A.



Für eine Kosmetikfirma soll ein Werbebanner entworfen werden.
Die Modellierung soll mit möglichst einfachen Funktionen und ganzzahligen Koordinatenwerten erfolgen, siehe Zeichnung.
In das Flächenstück soll für einen Werbetext ein achsenparalleles Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A einbeschrieben werden. Ermittle A.



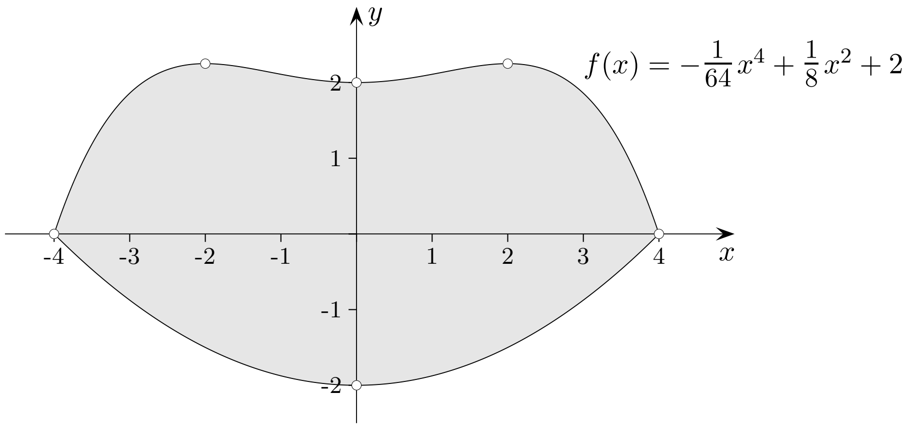


$A(x) = (f(x) - g(x)) \cdot 2x = -\frac{1}{32}x^5 + 8x, \quad 2{,}828 \leq x < 4, \quad$ beachte: $f(2{,}828) = 2$

$x_{\mathrm{E}} = 2{,}675 \notin \mathbb{D}_A$

$x_{\max} = 2{,}828$ Randextremum

$A_{\max} = 16{,}97$



<u>oberer Rand</u>

Ansatz $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

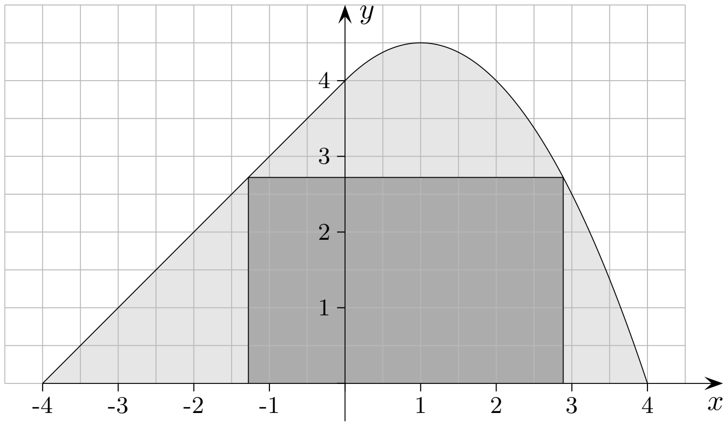
Bedingungen:

1. $f(0) = 2$
2. $f(4) = 0$
3. $f'(2) = 0$

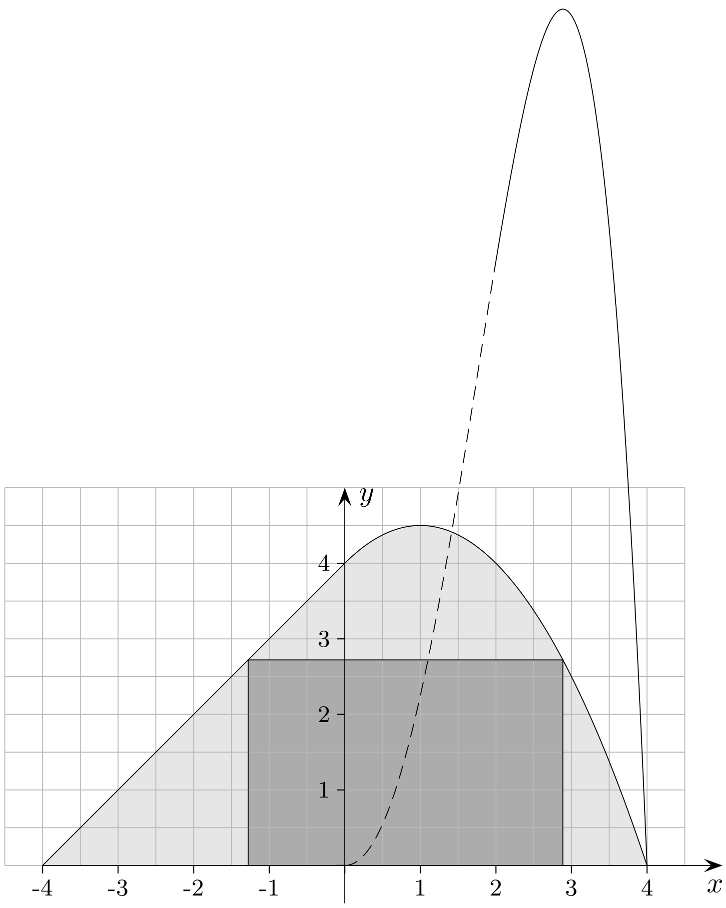
$$\begin{aligned} 1.\quad & c = 2 \\ 2.\quad 256a + 16b + & c = 0 \\ 3.\quad 32a + 4b & = 0 \end{aligned}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + 2$

In das hellgraue Flächenstück wird ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A einbeschrieben. Im Bereich $-4 \leq x \leq 0$ ist die obere Begrenzungslinie geradlinig, im Bereich $0 \leq x \leq 4$ parabelförmig. An der Stelle $x = 0$ liegt kein Knick vor. Ermittle A. Es darf angenommen werden, dass die rechte untere Ecke des Rechtecks auf der x-Achse zwischen 2 und 4 liegt.



In das hellgraue Flächenstück wird ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A einbeschrieben. Im Bereich $-4 \leq x \leq 0$ ist die obere Begrenzungslinie geradlinig, im Bereich $0 \leq x \leq 4$ parabelförmig. An der Stelle $x = 0$ liegt kein Knick vor. Ermittle A. Es darf angenommen werden, dass die rechte untere Ecke des Rechtecks auf der x-Achse zwischen 2 und 4 liegt.



$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

$y = x + 4$

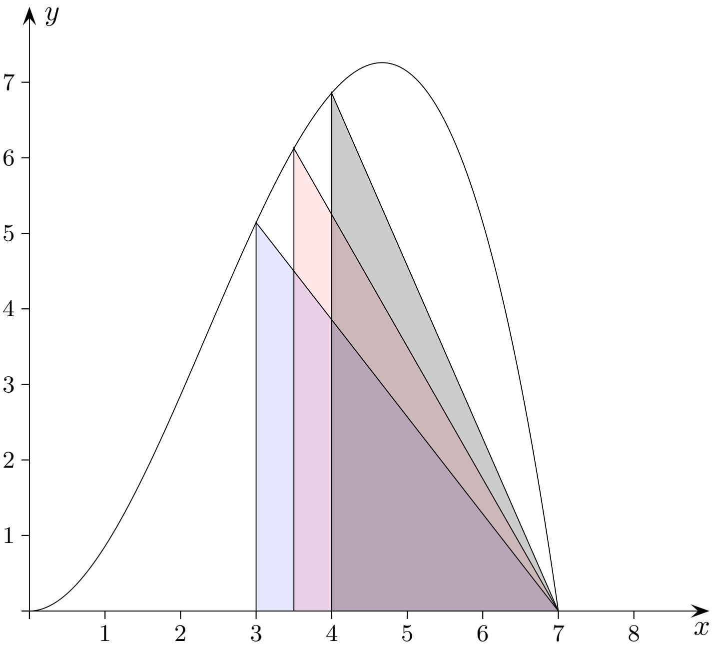
$x = y - 4$

$A(x) = (x - (f(x) - 4)) \cdot f(x)$

$x = 2{,}886$

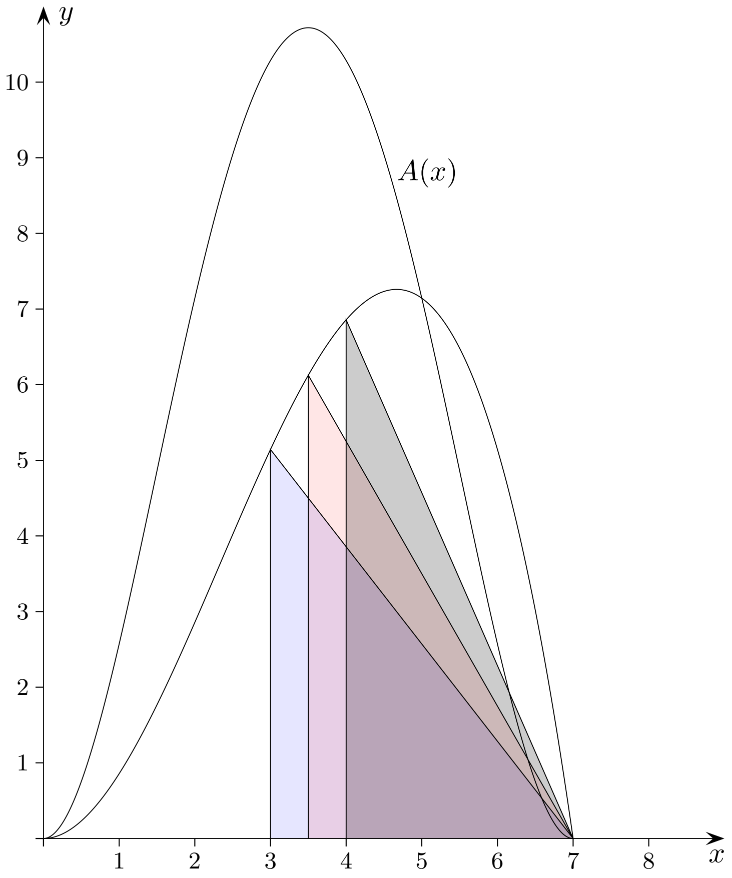
$A = 11{,}334$

↑ Maximales Dreieck (auch ohne GTR)



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{7}x^3 + x^2$.
Für welches c, $0 \leq c \leq 7$, hat das Dreieck mit den Eckpunkten $A(c \mid 0)$, $B(c \mid f(c))$ und $C(7 \mid 0)$ maximalen Flächeninhalt?

↑ Maximales Dreieck (auch ohne GTR)



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{7}x^3 + x^2$.
Für welches c, $0 \leq c \leq 7$, hat das Dreieck mit den Eckpunkten $A(c \mid 0)$, $B(c \mid f(c))$ und $C(7 \mid 0)$ maximalen Flächeninhalt?

$$A(c) = \frac{1}{2}f(c)(7-c) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{7}c^3 + c^2)(7-c) = \frac{1}{14}c^2(c-7)^2$$

$$A'(c) = \frac{1}{7}x(2x-7)(x-7) = \frac{2}{7}c^3 - 3c^2 + 7c$$

$$A'(c) = 0 \qquad \overset{\text{Zusätzliches}}{\Longleftrightarrow} \qquad f'(c) = \frac{f(c)}{7-c} \quad \Longleftrightarrow \quad f'(c)(c-7) + f(c) = 0, \quad \text{d.h.?}$$

$$c_1 = 0,\ c_2 = \frac{7}{2},\ c_3 = 7$$

Da $A(c) \geq 0$ für $0 \leq c \leq 7$ ist und $A(0) = A(7) = 0$,
wird das Maximum an der Stelle c_2 angenommen.

alternativ: $A''(c) = \frac{6}{7}c^2 - 6c + 7$

$A''(\frac{7}{2}) = -\frac{7}{2} < 0$