Merkhilfe Differenzialrechnung

1. Symmetrie — Achsensymmetrie zur y-Achse $\iff$

   Punktsymmetrie zum Ursprung $\iff$

2. Spiegelung — an der x-Achse $y = ?$

   an der y-Achse $y = ?$

3. Verschiebung — um c in x-Richtung nach rechts (links)

   um d in y-Richtung

4. gestreckt/gestaucht — mit Faktor a in x-Richtung

   mit Faktor b in y-Richtung

5. Monotonie — f streng monoton wachsend auf I, falls

   f streng monoton fallend auf I, falls

6. Hochpunkt $\mathrm{H}(x_0 \mid f(x_0))$, falls

   oder VZW

7. Tiefpunkt $\mathrm{T}(x_0 \mid f(x_0))$, falls

   oder VZW

8. Graph von f linksgekrümmt auf I,
   falls auf I

9. Graph von f rechtsgekrümmt auf I,
   falls auf I

10. Wendepunkt $\mathrm{W}(x_0 \mid f(x_0))$, falls

    oder VZW

11. Tangentengleichung

12. Normalengleichung

13. Steigung, Winkel

14. Schnittwinkel zwischen Geraden (Tangenten)

15. allgemeine Sinusfunktion $f(x) = ?$ Amplitude $|a|$,
Verschiebung um c in x-Richtung, Periode $\frac{2\pi}{b}$, Verschiebung um d in y-Richtung

16. Berührbedingungen, Funktionen f und g, Stelle x_0

17. Bedingungen für das rechtwinklige Schneiden, Funktionen f und g, Stelle x_0

18. stetige Verbindung von f und g an der Stelle x_0,
d. h. sprungfreier (nahtloser) Übergang

knickfreier (glatter) Übergang

krümmungsruckfreier Übergang

19. Krümmung, Krümmungskreis

20. maximaler Flächeninhalt eines einbeschriebenen Rechtecks
maximale Differenz der Funktionswerte
minimale Entfernung zum Ursprung
maximaler Flächeninhalt eines in eine Fläche gelegten Rechtecks

21. Interpretation einer Funktionsgleichung

a) $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b) $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c) $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d) $|f(x_0) - g(x_0)| = 5$

e) $\frac{f(x_0+6) - f(x_0)}{6} = 1$

f) $\frac{f(x_0+1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}5$

g) $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}2$

22. exponentielles Wachstum
iterativ, $p\,\%$ pro Zeiteinheit
Prozentuales Wachstum, Funktionsgleichung
Funktionsgleichung, zur Basis e
Differenzialgleichung

23. exponentielle(r) Abnahme (Zerfall)
iterativ, $p\,\%$ pro Zeiteinheit
Prozentuale Abnahme, Funktionsgleichung
Funktionsgleichung, Basis e
Differenzialgleichung

24. begrenztes Wachstum
iterativ, $p\,\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

25. begrenzte(r) Abnahme (Zerfall)
iterativ, $p\,\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

26. linearer Zufluss, exponentieller Abfluss (z. B. Tropfinfusion)
iterativ, $p\,\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

27. logistisches Wachstum
iterativ, $p\,\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

28. Vergiftetes Wachstum
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

29. Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

a) $P(a \mid b)$ liegt auf dem Graphen von f

b) Nullstelle $x = a$

c) Extremum $E(a \mid b)$

d) Wendepunkt $W(a \mid b)$

e) Sattelpunkt $S(a \mid b)$

f) in $A(a \mid b)$ die Steigung m

g) Tangente $y = mx + b$ an der Stelle $x = a$

h) Steigungswinkel an der Stelle $x = a$ (z. B.) $\alpha = -20°$

i) 12 % Anstieg, d. h. 12 m Höhenzunahme je 100 m in x-Richtung

30. Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

a) y-achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades

b) y-achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades

c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades

d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades

e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades

f) Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

31. Zusammenhang vom Grad n einer ganzrationalen Funktion und der Anzahl der
Nullstellen
Wendepunkte

32. Ortskurve für $Max\left(\frac{2}{3}k \mid \frac{4}{9}k^2\right)$

33. Asymptote

34. Ableitung von

$$f(x) = x^5 - x + 1$$
$$f(x) = x^2(x^4 - 1)$$
$$f(x) = e^{-x^2}$$
$$f(x) = e^{g(x)}$$
$$f(x) = xe^{-x}$$
$$f(x) = \sin x$$
$$f(x) = \cos x$$
$$f(x) = \ln x$$
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
$$f(x) = \sqrt{x}$$

35. Ableitungsregeln

Produktregel $(uv)' =$

Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' =$

Kettenregel $\big(u(v(x))\big)' =$

$(a^x)' =$

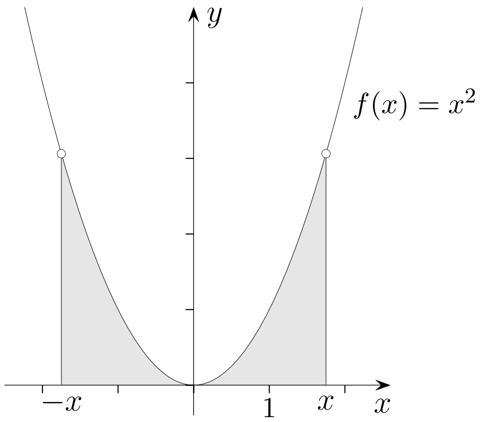
36. Randextrema

37. gemeinsame Punkte einer Funktionenschar

38. Kreisgleichung

zum Anfang

Symmetrie	Achsensymmetrie zur y-Achse	$\Longleftrightarrow$	$f(-x) = f(x)$	für alle x
	Punktsymmetrie zum Ursprung	$\Longleftrightarrow$		

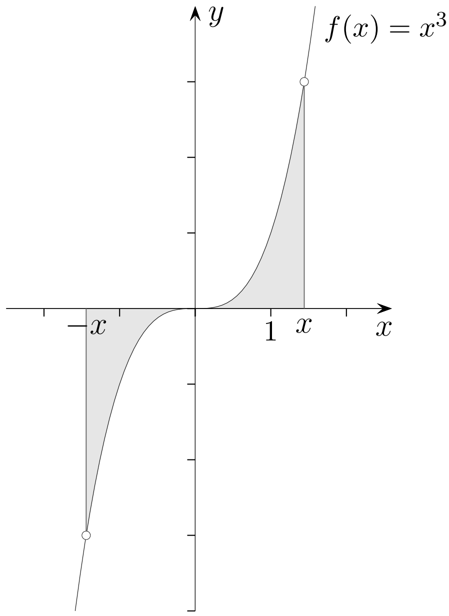


$\longleftarrow$

Der Graph eines Polynoms mit nur geraden Exponenten ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
Beispiel: $f(x) = x^6 - 3x^2 + 5$

Symmetrie Achsensymmetrie zur y-Achse $\iff$

Punktsymmetrie zum Ursprung $\iff$ $f(-x) = -f(x)$ für alle x



$\longleftarrow$

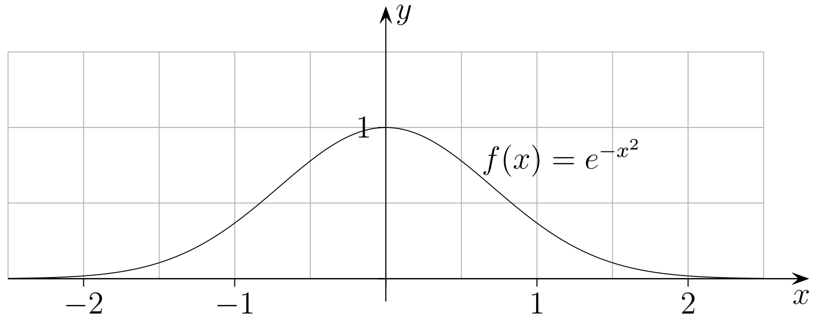
Der Graph eines Polynoms mit nur ungeraden Exponenten ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn überdies der konstante Summand Null ist. Der Graph muss durch den Ursprung verlaufen.

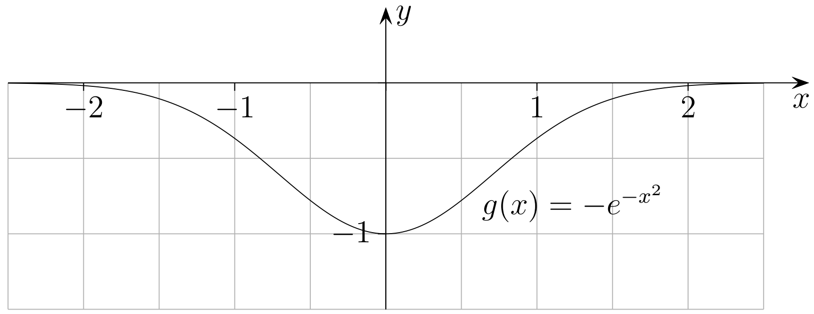
Beispiel: $f(x) = x^5 + 2x^3 - x$

nicht punktsymmetrisch wäre: $f(x) = x^5 - x^3 + 2$

Spiegelung	an der x-Achse:	$y = -f(x)$
	an der y-Achse:	$y = ?$

⟵

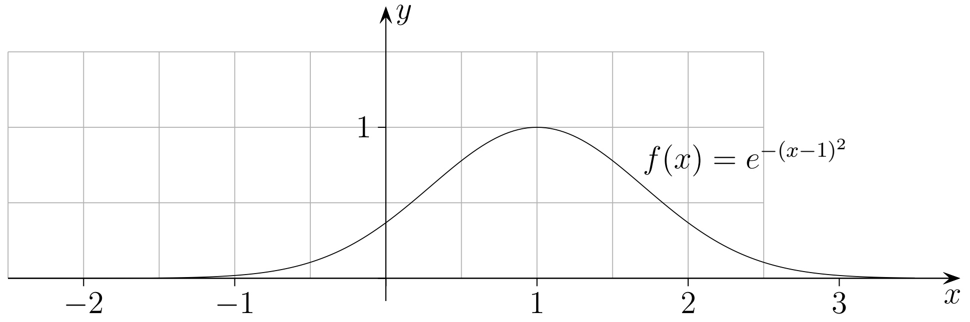


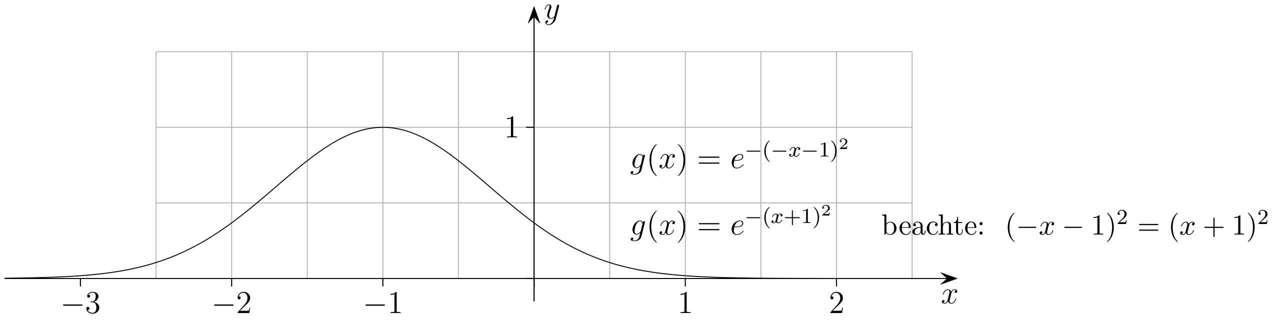


Spiegelung an der x-Achse: $y = ?$

an der y-Achse: $y = f(-x)$

⟵

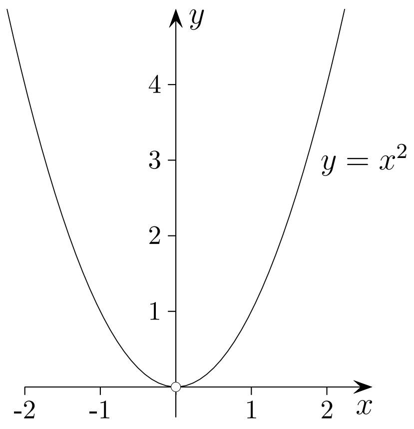


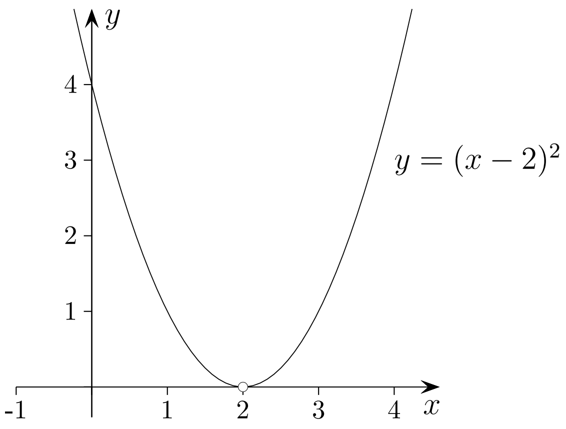


Verschiebung um c (c pos.) in x-Richtung nach rechts: $y = f(x - c)$
x durch $x - c$ ersetzen

nach links: $y = f(x + c)$
x durch $x + c$ ersetzen

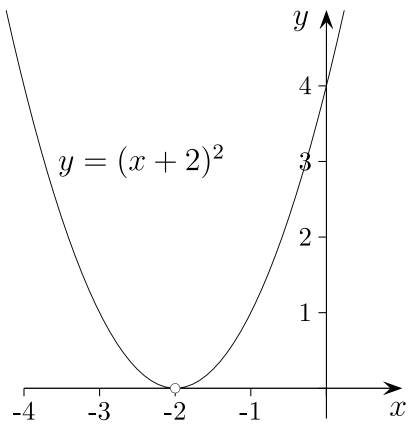
um d in y-Richtung





$x = 2$ eingesetzt ergibt $y = 0$

⟵

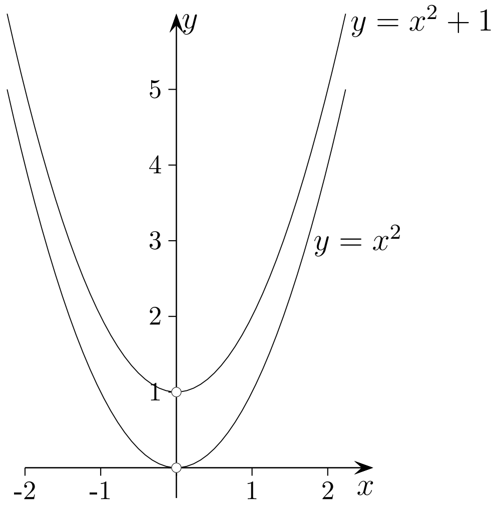


$x = -2$ eingesetzt ergibt $y = 0$

Verschiebung um c in x-Richtung nach rechts (links)

um d in y-Richtung: $y = f(x) + d$

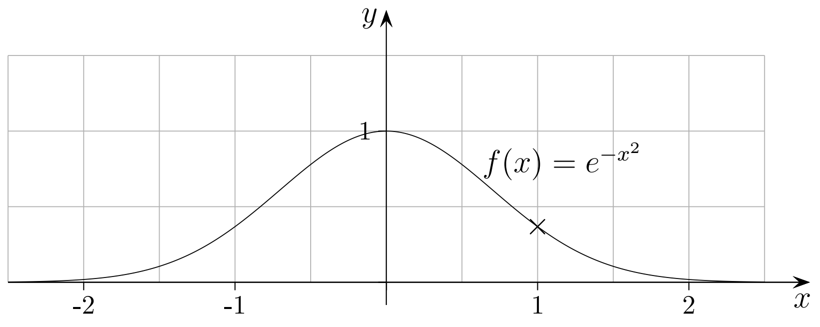
⟵

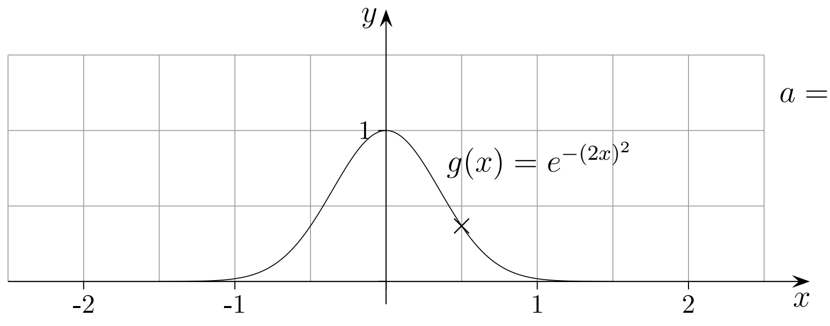


gestreckt/gestaucht mit Faktor a in x-Richtung: $y = f(\frac{1}{a} \cdot x)$

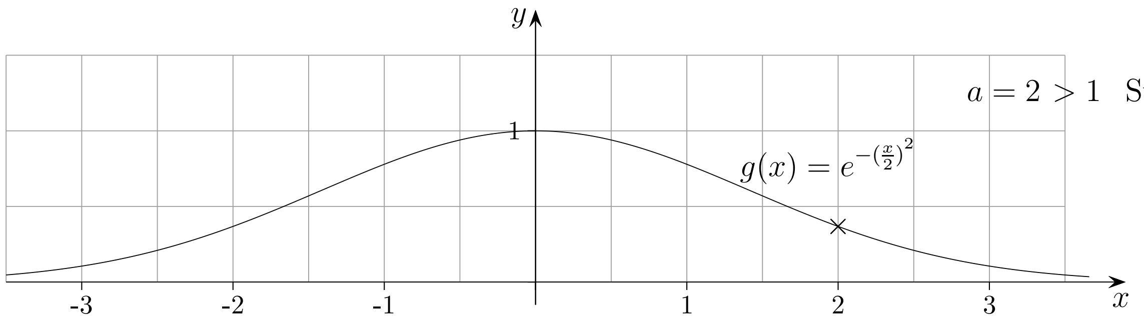
mit Faktor b in y-Richtung:

⟵





$a = \frac{1}{2} < 1$ Stauchung

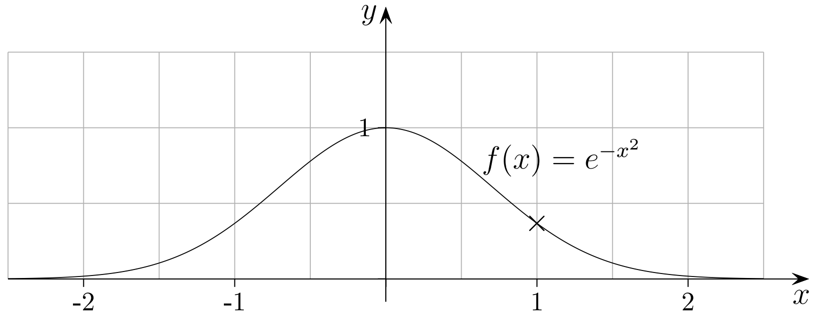


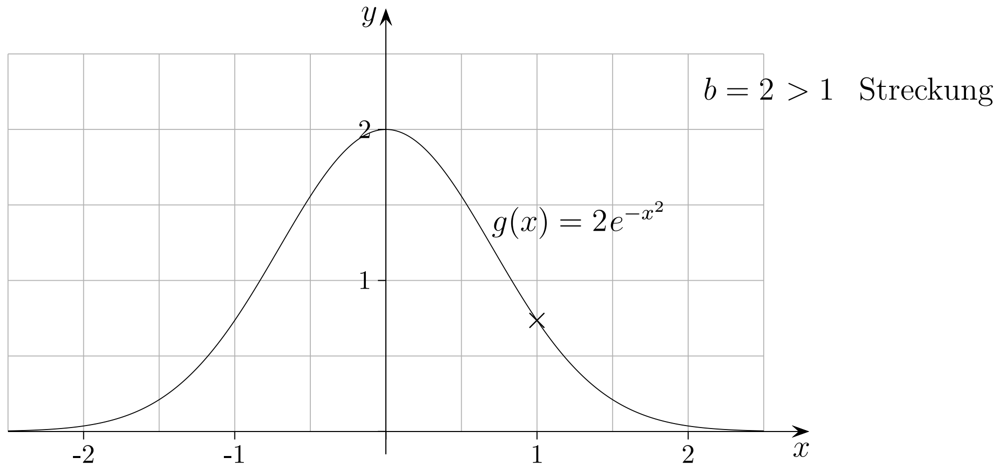
$a = 2 > 1$ Streckung

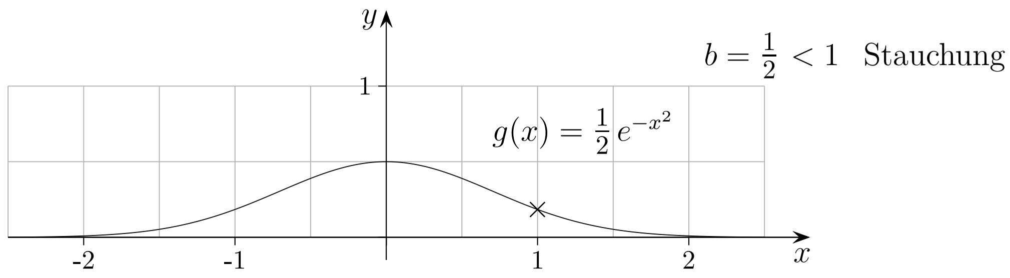
gestreckt/gestaucht mit Faktor a in x-Richtung:

mit Faktor b in y-Richtung: $y = b \cdot f(x)$

⟵



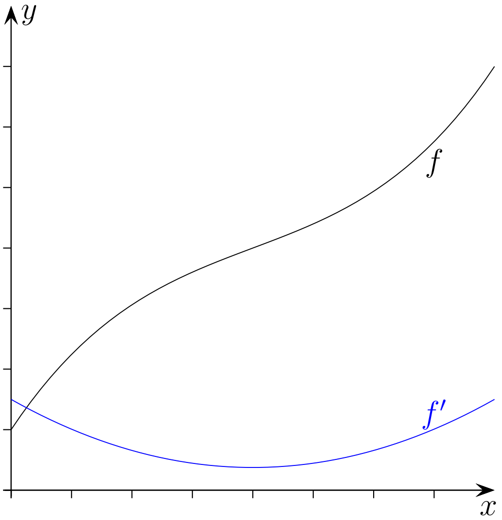




Monotonie $\quad f$ streng monoton wachsend auf I, falls $\quad f'(x) > 0$ für alle $x \in I$

f streng monoton fallend auf I, falls

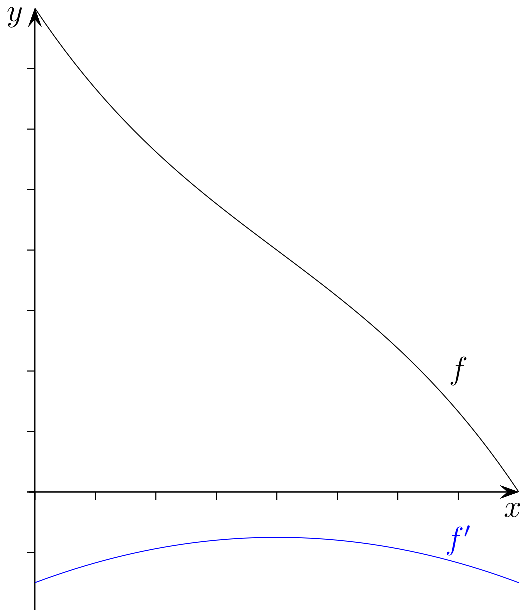
⟵



Monotonie $\quad$ f streng monoton wachsend auf I, falls

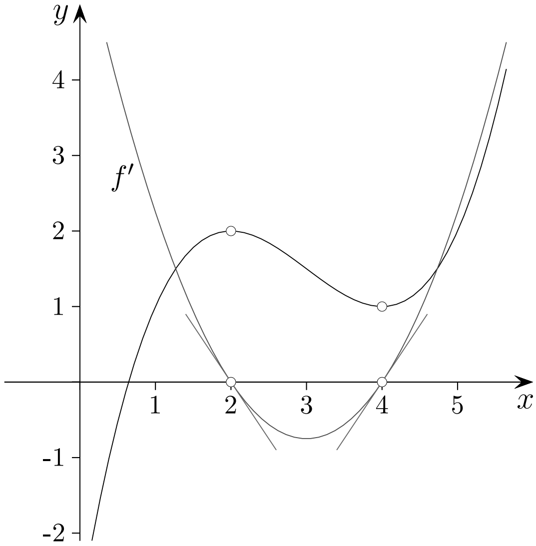
f streng monoton fallend auf I, falls $\qquad f'(x) < 0$ für alle $x \in I$

⟵



Hochpunkt $\quad H(x_0 \mid f(x_0)),$ falls $\quad f'(x_0) = 0 \quad$ und $\quad f''(x_0) < 0$

oder

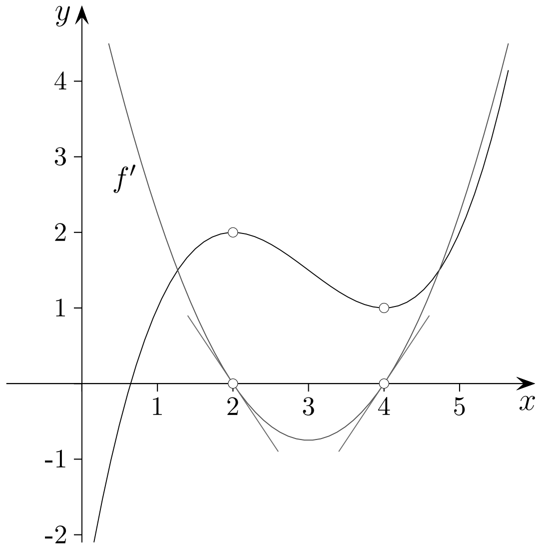


←

Hochpunkt $\mathrm{H}(x_0 \mid f(x_0))$, falls

oder $f'(x_0) = 0$ und Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ von f' an der Stelle x_0,

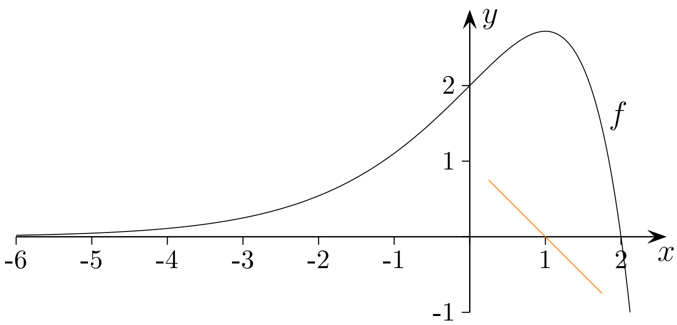
$f'(x_0 - h) > 0$ und $f'(x_0 + h) < 0$ für eine Umgebung von x_0



⟵

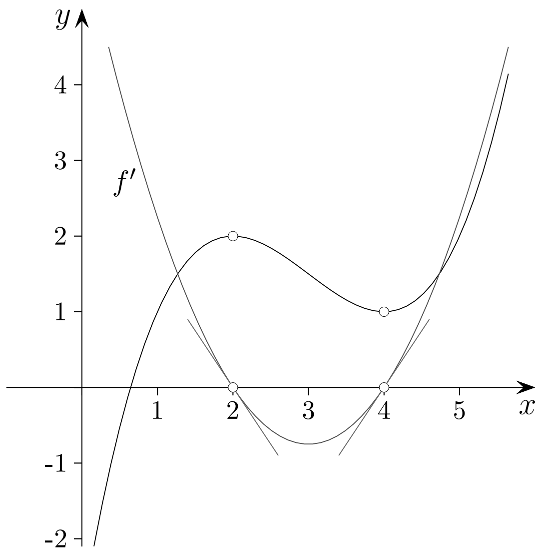
$$f(x) = (2 - x) \cdot e^x$$
$$f'(x) = (1 - x) \cdot e^x$$

Am Term $1 - x$ (linear mit negativer Steigung, $e^x > 0$) ist zu erkennen, dass an der Stelle $x = 1$ ein Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ (Maximum von f) vorliegt.



Tiefpunkt $\quad T(x_0 \mid f(x_0))$, falls $\quad f'(x_0) = 0 \quad$ und $\quad f''(x_0) > 0$

oder



$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3$

<u>Extrema</u>:

notw. Bed.: $\quad f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 + 3x^2 \\ x^3 + 3x^2 &= 0 \\ x^2\,(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

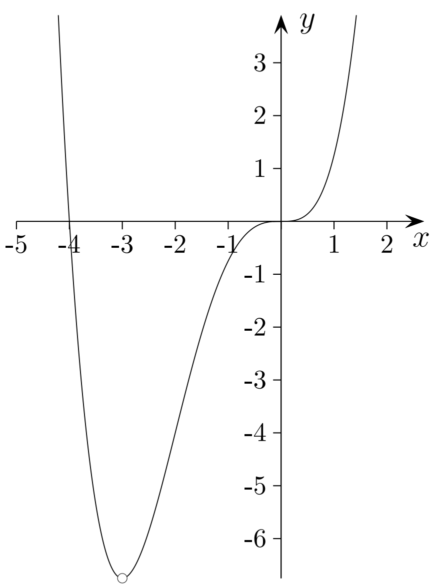
$x_1 = 0 \qquad x_2 = -3$

$Min(-3 \mid -\frac{27}{4})$

Minimum oder Maximum?

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3x^2 + 6x \\ f''(0) &= 0 \\ f''(-3) &= 3 \cdot 9 - 18 > 0 \end{aligned}$$

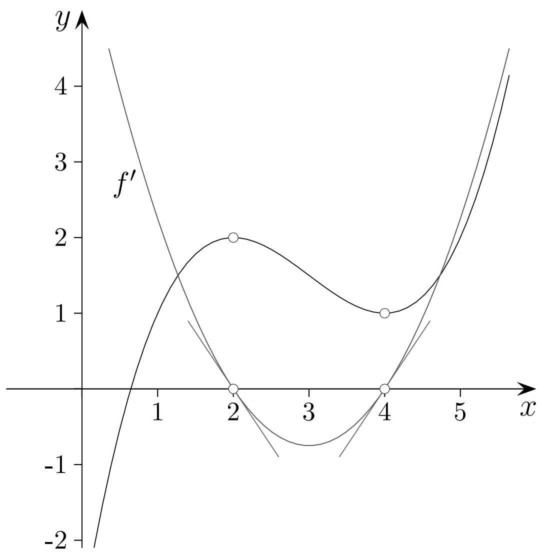
Der y-Wert wird errechnet, indem der x-Wert in die Funktionsgleichung eingesetzt wird.



Tiefpunkt $\mathrm{T}(x_0 \mid f(x_0))$, falls

oder $f'(x_0) = 0$ und Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ von f' an der Stelle x_0,

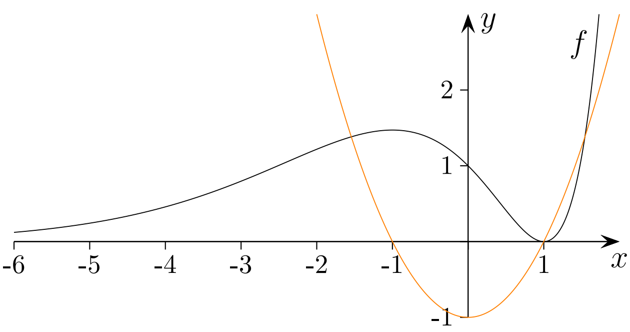
$f'(x_0 - h) < 0$ und $f'(x_0 + h) > 0$ für eine Umgebung von x_0



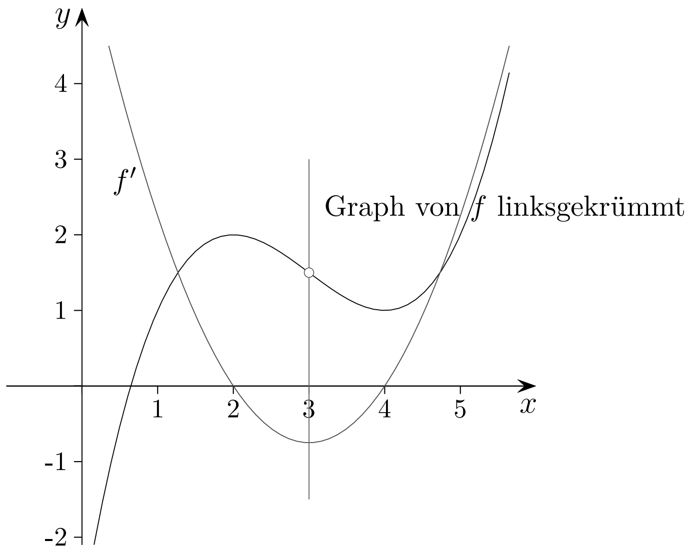
⟵

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot e^x$$
$$f'(x) = (x^2-1) \cdot e^x$$

Am Term $x^2 - 1$ (nach unten verschobene Normalparabel, $e^x > 0$) ist zu erkennen, dass an der Stelle $x = -1$ ein Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ (Maximum von f) und an der Stelle $x = 1$ ein Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ (Minimum von f) vorliegt.

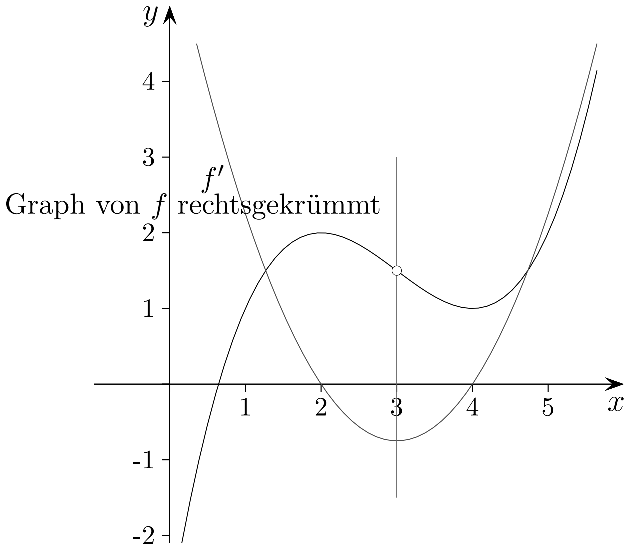


Graph von f linksgekrümmt auf I,
falls auf I $f''(x) > 0$ gilt.



⟵

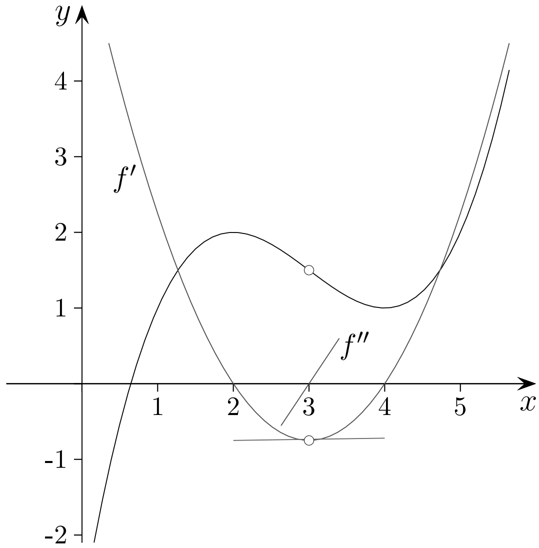
Graph von f rechtsgekrümmt auf I,
falls auf I $f''(x) < 0$ gilt.



⟵

Wendepunkt $\quad$ W$(x_0 \mid f(x_0))$, falls $\quad f''(x_0) = 0 \quad$ und $\quad f'''(x_0) \neq 0$

oder VZW



$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3$

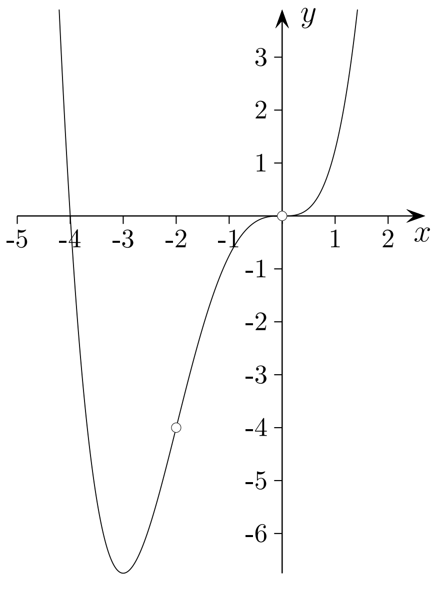
<u>Wendepunkte</u>:

notw. Bed.: $\quad f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x &= 0 \\ x\,(3x+6) &= 0 \\ &x_1 = 0 \qquad x_2 = -2 \end{aligned}$$

$$W_1(0 \mid 0), \qquad W_2(-2 \mid -4)$$

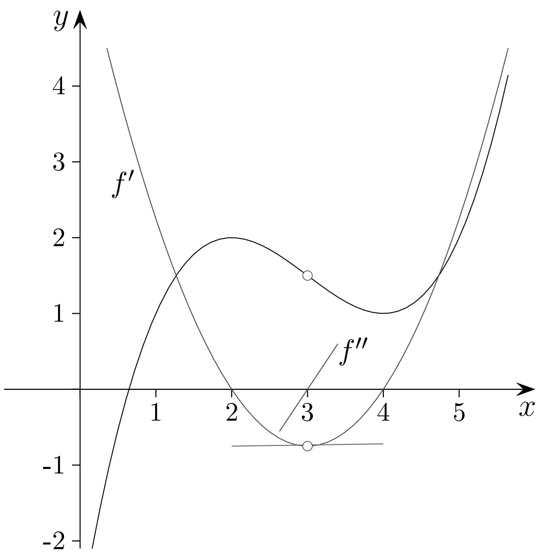
$$\begin{aligned} f'''(x) &= 6x + 6 \\ f'''(0) &= 6 \neq 0 \\ f'''(-2) &= -6 \neq 0 \end{aligned}$$



Wendepunkt $\quad W(x_0 \mid f(x_0))$, falls

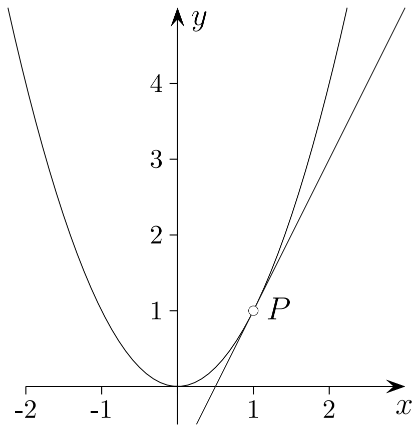
oder $\quad f''(x_0) = 0 \quad$ und $\quad$ Vorzeichenwechsel von f'' an der Stelle x_0,

$$f''(x_0 - h) \lessgtr 0 \text{ und } f''(x_0 + h) \gtrless 0 \text{ für eine Umgebung von } x_0$$

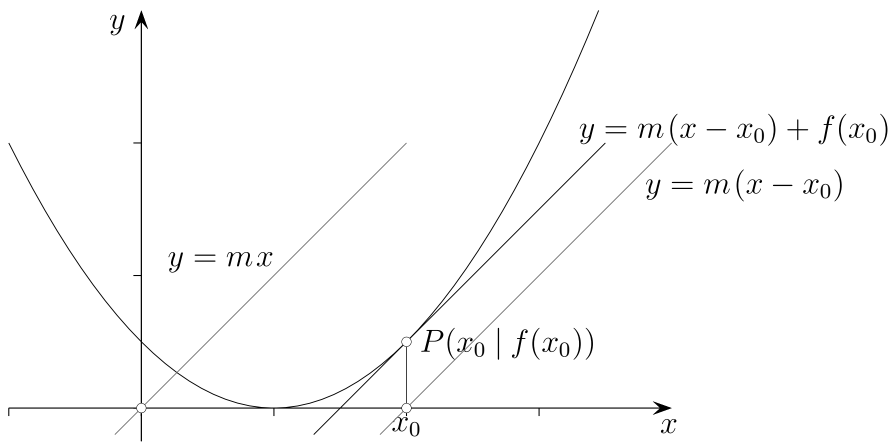


⟵

Tangentengleichung $\qquad y = f'(a)(x - a) + f(a)$



$\longleftarrow$



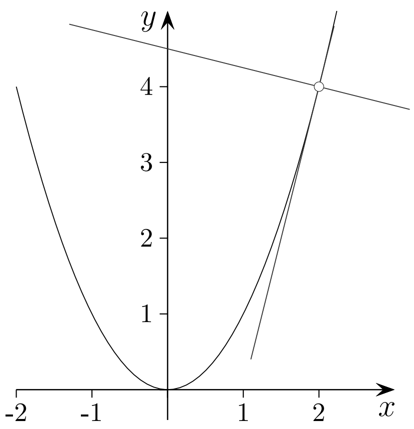
$f(x) = ax^2, \;\; P\big(3 \,|\, ?\big)$

Gleichung der Tangente in P

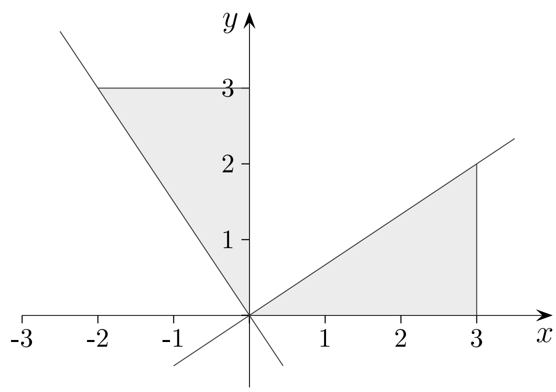
$y = 6a(x - 3) + 9a$

$y = 6ax - 9a$

Normalengleichung $\qquad y = \dfrac{-1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$



⟵

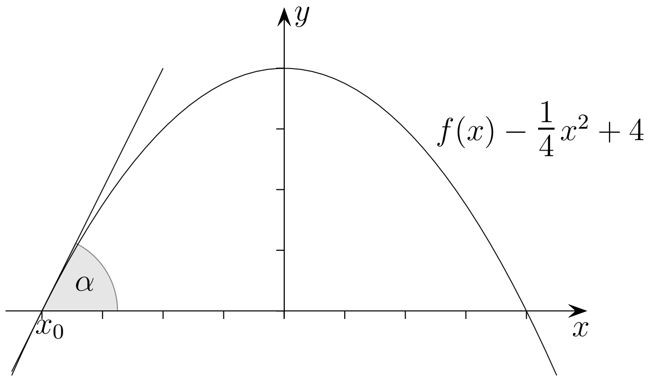


$f(x) = ax^2, \quad P\big(3 \,|\, ?\big)$

Gleichung der Normalen in P

$y = -\dfrac{1}{6a}(x-3) + 9a$

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= f'(x_0) \\ \alpha &= \arctan f'(x_0) \end{aligned}$$



⟵

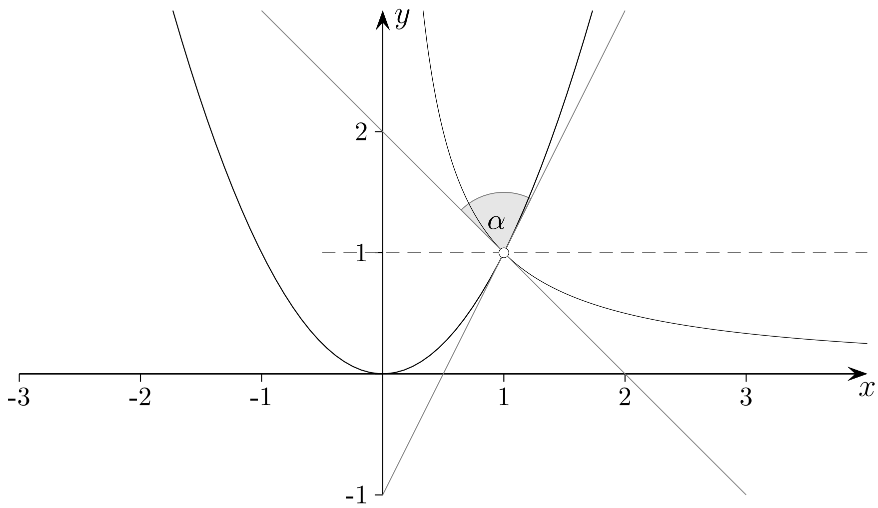
Schnittwinkel α der x-Achse und der Tangente an der Stelle $x = -4$

$f'(-4) = 2$

$\tan(\alpha) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 63{,}4°$

Schnittwinkel zwischen Geraden (Tangenten) $\alpha = |\tan^{-1}(m_2) - \tan^{-1}(m_1)|$

Für $\alpha > 90°$ gehe man zu $180° - \alpha$ über.



⟵

Schnittwinkel α der Graphen, d. h. der Tangenten an der Stelle $x = 1$

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

$f'(1) = 2, \;\; g'(1) = -1$

$\tan(\alpha_1) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = 63{,}4°$

$\tan(\alpha_2) = -1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_2 = -45°$

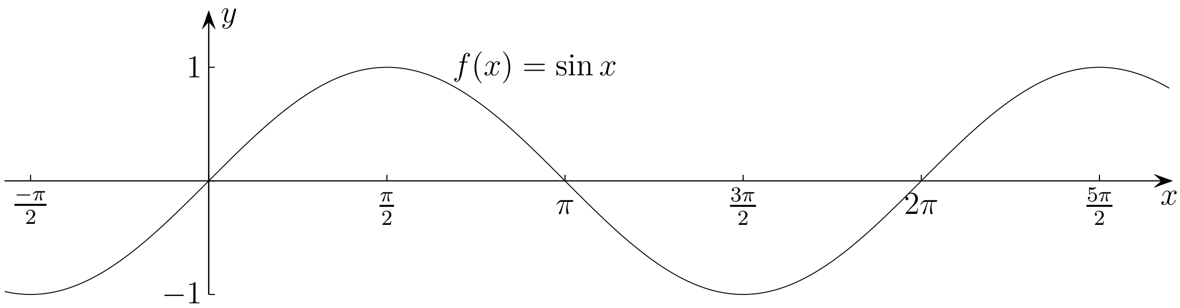
$\beta = 63{,}4° - (-45°) = 108{,}4°$

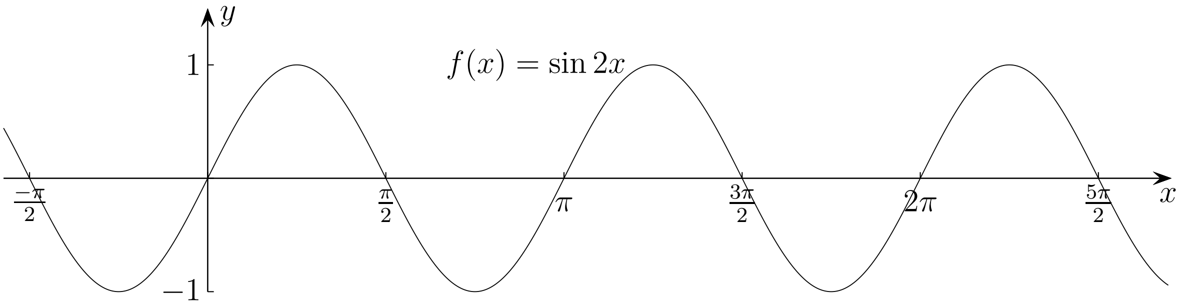
$\alpha = 180° - 108{,}4° = 71{,}6°$

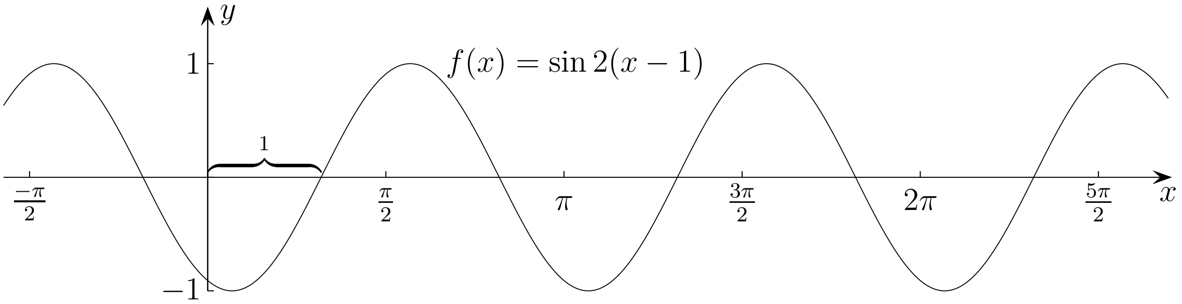
allgemeine Sinusfunktion $\qquad f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$

Amplitude $|a|$, Verschiebung um c in x-Richtung, Periode $\frac{2\pi}{b}$, $\quad b = \frac{2\pi}{\text{Periodenlänge}}$
Verschiebung um d in y-Richtung

⟵

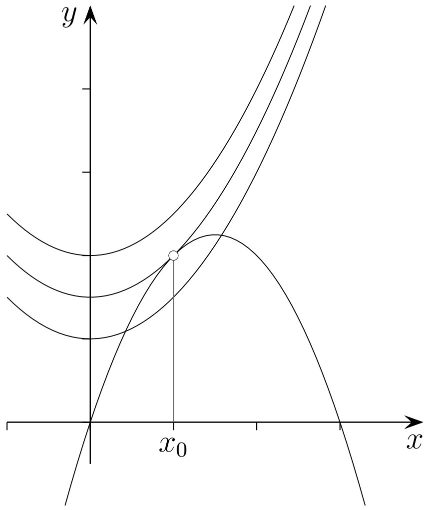






Berührbedingungen, Funktionen f und g, Stelle x_0

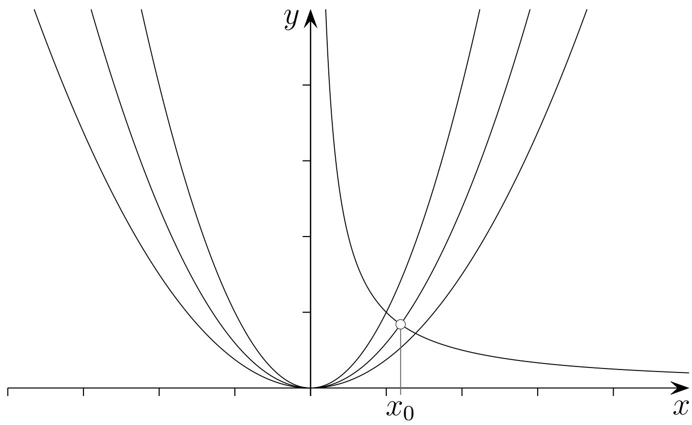
$$
\begin{aligned}
1.\ f(x_0) &= g(x_0) \\
2.\ f'(x_0) &= g'(x_0)
\end{aligned}
$$



⟵

Bedingungen für das rechtwinklige Schneiden, Funktionen f und g, Stelle x_0

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x_0) &= g(x_0) \\ 2. \quad f'(x_0) \cdot g'(x_0) &= -1 \end{aligned}$$

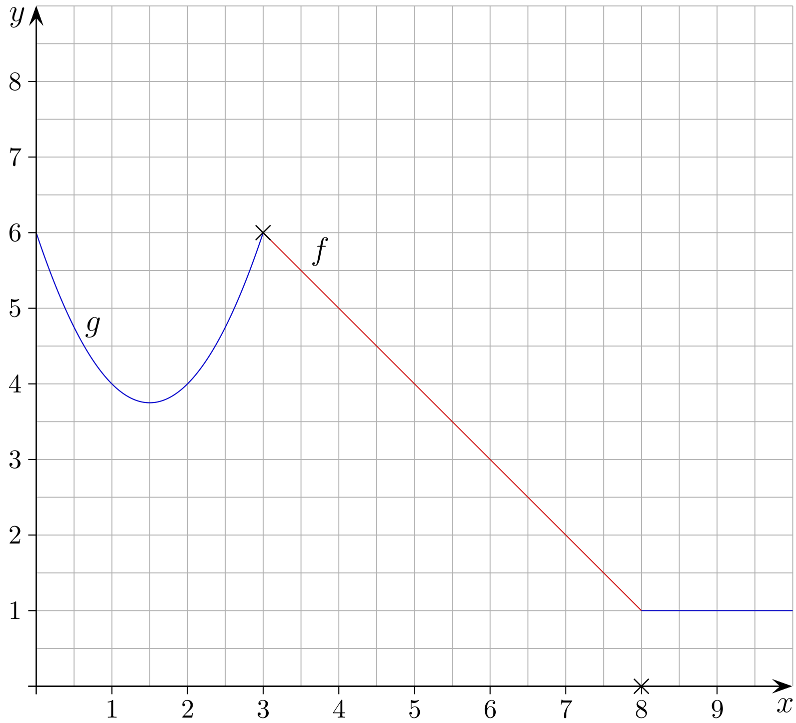


⟵

stetige Verbindung von f und g an der Stelle x_0,
d. h. sprungfreier (nahtloser) Übergang $\quad f(x_0) = g(x_0)$

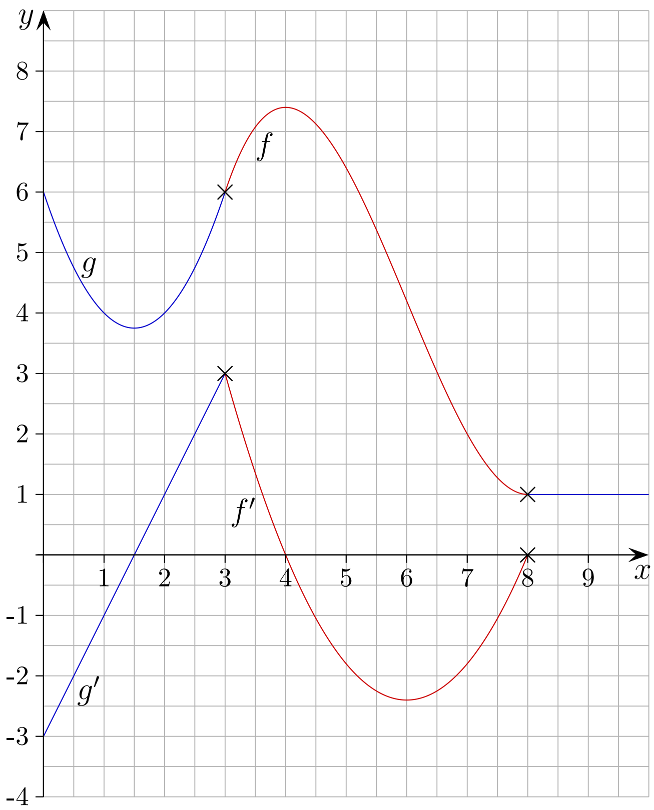
knickfreier (glatter) Übergang

krümmungsruckfreier Übergang



⟵

stetige Verbindung von f und g an der Stelle x_0, d. h. sprungfreier (nahtloser) Übergang	$f(x_0) = g(x_0)$	
knickfreier (glatter) Übergang	$f'(x_0) = g'(x_0)$	zusätzlich
krümmungsruckfreier Übergang		



⟵

Die Funktion mit den differenzierbaren Teilfunktionen f und g ist bei einem knickfreien Übergang auch an der Stelle x_0 differenzierbar.

Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig (Satz). Stetigkeit ist daher eine notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit.

Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion differenzierbar ist?

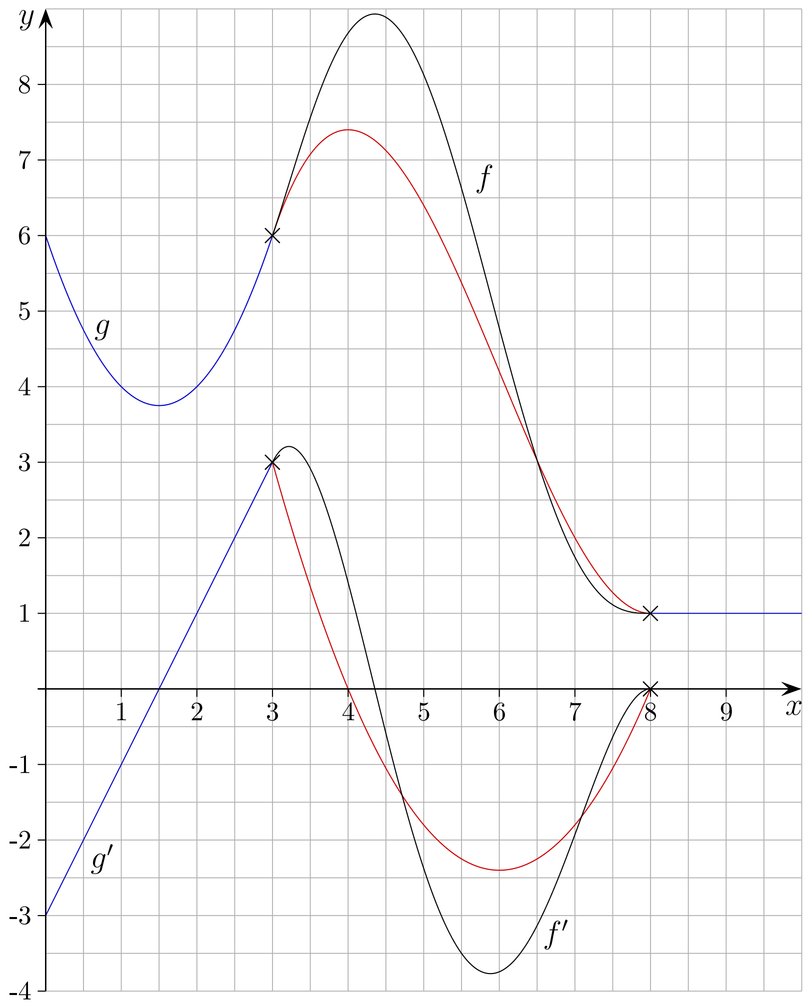
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \leq 2 \\ bx + 1 & x > 2 \end{cases}$$

Stetigkeit muss auch vorliegen.

$$\begin{aligned} 2a - b &= -3 \\ 4 + a &= b \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad a = 1 \text{ und } b = 5$$

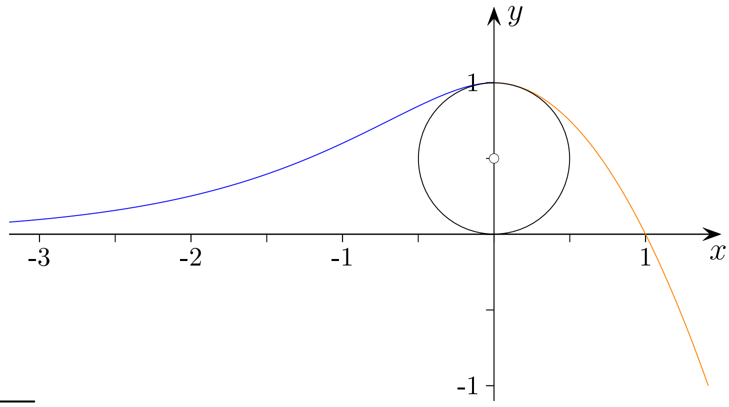
stetige Verbindung von f und g an der Stelle x_0, d. h. sprungfreier (nahtloser) Übergang	$f(x_0) = g(x_0)$	
knickfreier (glatter) Übergang	$f'(x_0) = g'(x_0)$	zusätzlich
krümmungsruckfreier Übergang	$f''(x_0) = g''(x_0)$	zusätzlich



⟵

Die Krümmung von Geraden ist null, desgleichen die an Wendestellen.
Kreise mit dem Radius r haben die konstante Krümmung $\frac{1}{r}$.
An Extremstellen (es reicht $f'(x_0) = 0$) ist die Krümmung $\kappa = f''(x_0)$.
Der Radius des Krümmungskreises beträgt $r = |\frac{1}{\kappa}|$.

An einem krümmungssprungfreien (krümmungsruckfreien) Übergang stimmen für beide Teilfunktionen die Krümmungskreise überein.



Die allgemeine Krümmungs-Formel

$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}}$$

muss nicht gewusst werden.

⟵

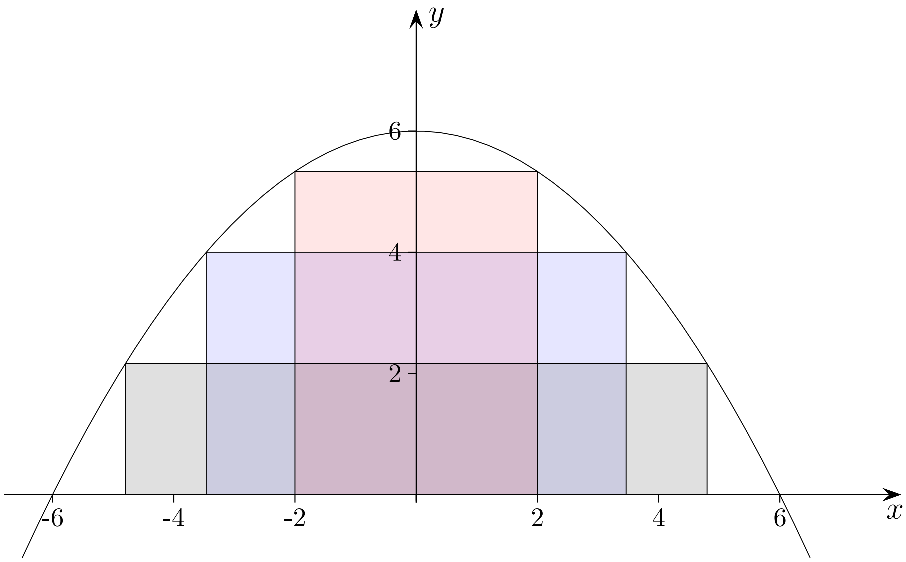
maximaler Flächeninhalt eines einbeschriebenen Rechtecks

maximale Differenz der Funktionswerte

minimale Entfernung zum Ursprung

maximaler Flächeninhalt eines in eine Fläche gelegten Rechtecks

Maximaler Flächeninhalt



Gegeben ist die Funktion $f(x) = 6 - \dfrac{1}{6}x^2$.
Welches einbeschriebene Rechteck (Seiten parallel zu den Koordinatenachsen, siehe Grafik) hat maximalen Flächeninhalt?

⟵

$a = 4\sqrt{3} = 6{,}928,\ b = 4$
$A_{\max} = 27{,}713\ FE$

maximaler Flächeninhalt eines einbeschriebenen Rechtecks

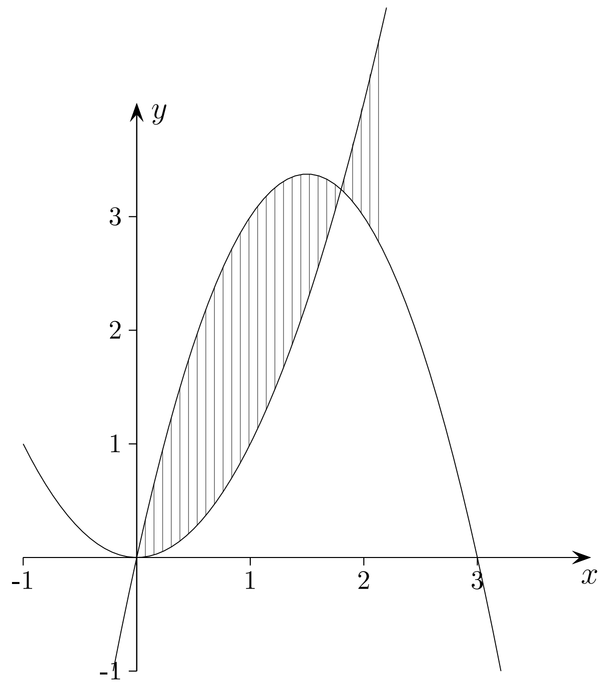
maximale Differenz der Funktionswerte

minimale Entfernung zum Ursprung

maximaler Flächeninhalt eines in eine Fläche gelegten Rechtecks

Maximale Differenz

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = -\frac{3}{2}x(x-3)$.
An welcher Stelle im Intervall $[0\,|\,2{,}2]$ ist die Differenz der Funktionswerte maximal?



⟵

$x_{\text{max}} = 0{,}9$ lokal
$d(x_{\text{max}}) = 2{,}025$ lokal
$d(0) = 0$
$d(2{,}2) = 2{,}2$ Betrag, Randextremum an der Stelle $x = 2{,}2$

maximaler Flächeninhalt eines einbeschriebenen Rechtecks

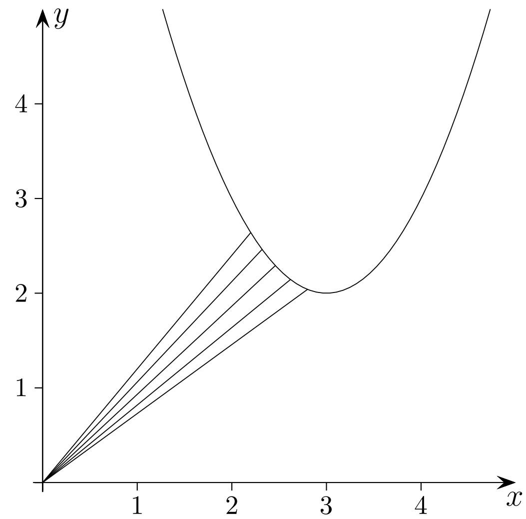
maximale Differenz der Funktionswerte

minimale Entfernung zum Ursprung

maximaler Flächeninhalt eines in eine Fläche gelegten Rechtecks

Minimale Entfernung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x-3)^2 + 2$.
Welcher Punkt auf dem Graphen von f hat vom Ursprung minimale Entfernung?



⟵

$d(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$

$P(2{,}462 \mid 2{,}289)$

$d(x_{\min}) = 3{,}362$

maximaler Flächeninhalt eines einbeschriebenen Rechtecks

maximale Differenz der Funktionswerte

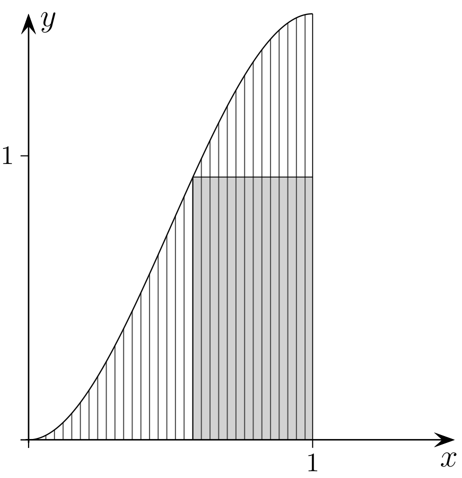
minimale Entfernung zum Ursprung

maximaler Flächeninhalt eines in eine Fläche gelegten Rechtecks

Maximaler Flächeninhalt

Gegeben ist die Funktion: $f(x) = -3x^3 + \frac{9}{2}x^2$

Welches in die schraffierte Fläche gelegte Rechteck hat maximalen Flächeninhalt?



⟵

$A(x) = (1 - x) \cdot f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$

$x_{\text{max}} = 0{,}578$

$A_{\text{max}} = 0{,}390 \; FE$

Interpretation einer Funktionsgleichung

a) $f(x_0) = g(x_0) + 2$

An der Stelle x_0 ist der Funktionswert von f um 2 größer als der Funktionswert von g.

b) $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c) $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d) $|\, f(x_0) - g(x_0)\,| = 5$

e) $\dfrac{f(x_0 + 6) - f(x_0)}{6} = 1$

f) $\dfrac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}5$

g) $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}2$

$\longleftarrow$

Interpretation einer Funktionsgleichung

a) $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b) $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

An der Stelle x_0 ist der Funktionswert von f 3mal so groß wie der Funktionswert von g.

c) $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d) $|\,f(x_0) - g(x_0)\,| = 5$

e) $\dfrac{f(x_0 + 6) - f(x_0)}{6} = 1$

f) $\dfrac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}5$

g) $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}2$

$\longleftarrow$

Interpretation einer Funktionsgleichung

a) $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b) $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c) $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

Die Funktion f hat im Abstand 4 - in x_0 und $x_0 + 4$ - gleiche Funktionswerte.

d) $|\,f(x_0) - g(x_0)\,| = 5$

e) $\frac{f(x_0 + 6) - f(x_0)}{6} = 1$

f) $\frac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}5$

g) $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}2$

$\longleftarrow$

Interpretation einer Funktionsgleichung

a) $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b) $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c) $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d) $|\,f(x_0) - g(x_0)\,| = 5$

An der Stelle x_0 ist der senkrechte Abstand der Funktionswerte von f und g 5.

e) $\dfrac{f(x_0 + 6) - f(x_0)}{6} = 1$

f) $\dfrac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}5$

g) $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}2$

⟵

Interpretation einer Funktionsgleichung

a) $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b) $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c) $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d) $|\,f(x_0) - g(x_0)\,| = 5$

e) $\dfrac{f(x_0+6) - f(x_0)}{6} = 1$

Die mittlere Steigung (Änderung, Änderungsrate) auf dem Intervall $[x_0; x_0 + 6]$ der Länge 6 beträgt 1.

f) $\dfrac{f(x_0+1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}5$

g) $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}2$

$\longleftarrow$

Interpretation einer Funktionsgleichung

a) $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b) $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c) $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d) $|\, f(x_0) - g(x_0)\,| = 5$

e) $\dfrac{f(x_0+6) - f(x_0)}{6} = 1$

f) $\dfrac{f(x_0+1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}5$

Die prozentuale mittlere Steigung auf dem Intervall $[x_0; x_0+1]$ der Länge 1 beträgt 0,5.

g) $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}2$

$\longleftarrow$

Interpretation einer Funktionsgleichung

a) $f(x_0) = g(x_0) + 2$

b) $f(x_0) = 3 \cdot g(x_0)$

c) $f(x_0 + 4) = f(x_0)$

d) $|\,f(x_0) - g(x_0)\,| = 5$

e) $\frac{f(x_0+6) - f(x_0)}{6} = 1$

f) $\frac{f(x_0+1) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}5$

g) $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0{,}2$

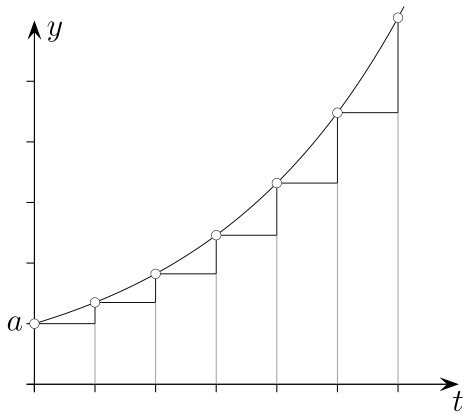
Die prozentuale Änderungsrate an der Stelle x_0 beträgt 0,2.

$\longleftarrow$

exponentielles Wachstum
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Prozentuales Wachstum, Funktionsgleichung
Funktionsgleichung, zur Basis e
Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + \tfrac{p}{100} f(n) \\ &= \left(1 + \tfrac{p}{100}\right) f(n), \qquad f(0) = a \end{aligned}$$

z. B. $f(n+1) = 1{,}03 f(n), \quad p = 3\,\%$



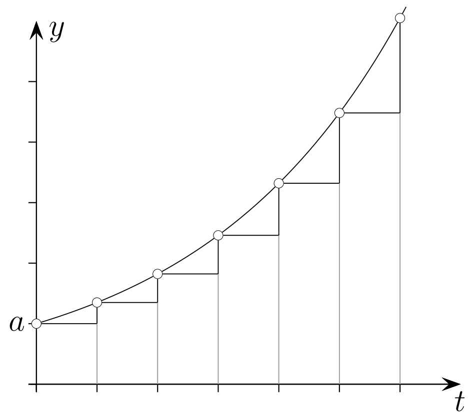
←

exponentielles Wachstum
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Prozentuales Wachstum, Funktionsgleichung
Funktionsgleichung, zur Basis e
Differenzialgleichung

$$f(n+1) = \left(1+\tfrac{p}{100}\right)f(n)$$

$$f(t) = a\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^t, \qquad f(0)=a$$

$$\text{z. B.}\quad f(t) = a\cdot 1{,}03^t, \quad p = 3\,\%$$



←

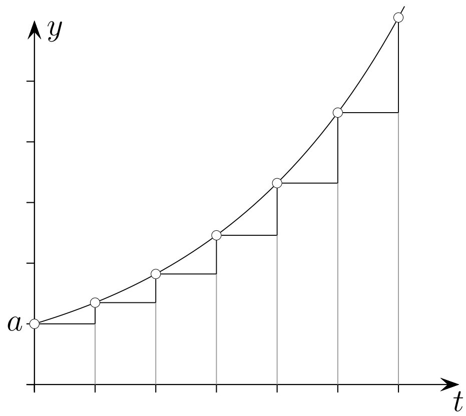
exponentielles Wachstum
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Prozentuales Wachstum, Funktionsgleichung
Funktionsgleichung, zur Basis e
Differenzialgleichung

$$f(t) = a\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^t, \qquad f(0) = a$$

$$f(t) = a e^{kt}, \quad k > 0, \qquad \text{Wachstumskonstante } k$$

$$e^k = 1 + \tfrac{p}{100}$$

$$k = \ln\left(1+\tfrac{p}{100}\right) \approx \tfrac{p}{100} \quad \text{für kleines } p$$



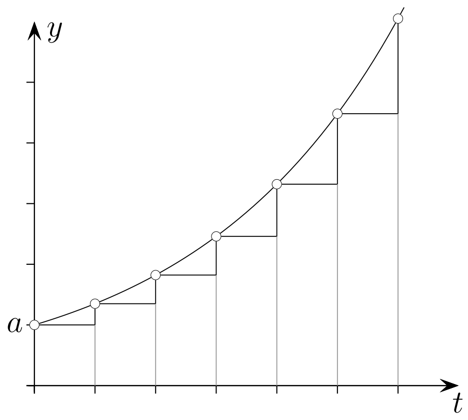
←

exponentielles Wachstum
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Prozentuales Wachstum, Funktionsgleichung
Funktionsgleichung, zur Basis e
Differenzialgleichung

$$f(t) = ae^{kt}, \qquad k > 0 \qquad \text{Wachstumskonstante } k$$

$$f'(t) = kf(t)$$

Beim exponentiellen Wachstum ist die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t)$ proportional zum vorhandenen Bestand $f(t)$.

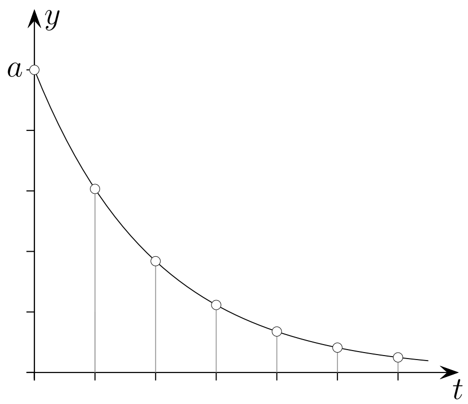


←

exponentielle(r) Abnahme (Zerfall)
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Prozentuale Abnahme, Funktionsgleichung
Funktionsgleichung, Basis e
Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) - \tfrac{p}{100} f(n) \\ &= \left(1 - \tfrac{p}{100}\right) f(n), \qquad f(0) = a \end{aligned}$$

$$\text{z. B.}\quad f(n+1) = 0{,}97 f(n), \quad p = 3\,\%$$



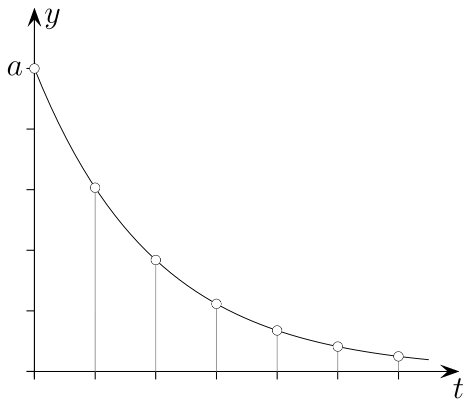
←

exponentielle(r) Abnahme (Zerfall)
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Prozentuale Abnahme, Funktionsgleichung
Funktionsgleichung, Basis e
Differenzialgleichung

$$f(n+1) = \left(1 - \tfrac{p}{100}\right) f(n)$$

$$f(t) = a\left(1 - \tfrac{p}{100}\right)^t, \qquad f(0) = a$$

$$\text{z. B.}\quad f(t) = a \cdot 0{,}97^t, \quad p = 3\,\%$$



←

exponentielle(r) Abnahme (Zerfall)

iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit

Prozentuale Abnahme, Funktionsgleichung

Funktionsgleichung, Basis e

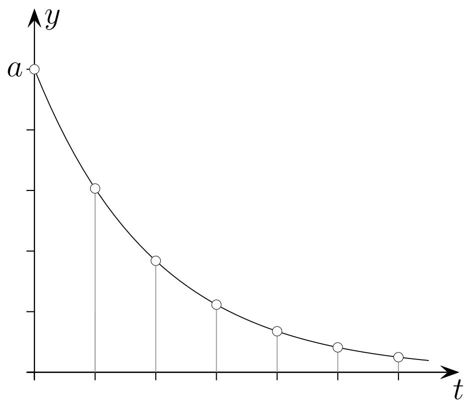
Differenzialgleichung

$$f(t) = a\left(1-\tfrac{p}{100}\right)^t, \qquad f(0)=a$$

$$f(t) = ae^{-kt}, \quad k>0 \qquad \text{Abnahmekonstante } k$$

$$e^{-k} = 1-\tfrac{p}{100}$$

$$k = -\ln\left(1-\tfrac{p}{100}\right) \approx \tfrac{p}{100} \quad \text{für kleines } p$$



⟵

exponentielle(r) Abnahme (Zerfall)

iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit

Prozentuale Abnahme, Funktionsgleichung

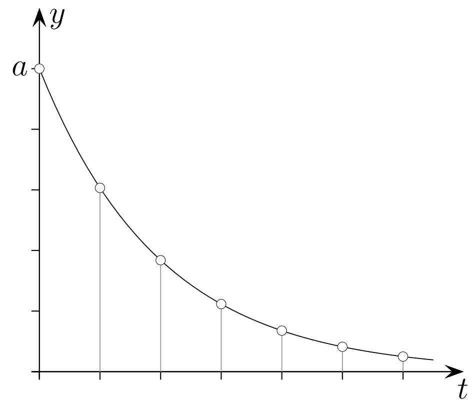
Funktionsgleichung, Basis e

Differenzialgleichung

$$f(t) = ae^{-kt}, \qquad k > 0 \qquad \text{Abnahmekonstante } k$$

$$f'(t) = -kf(t)$$

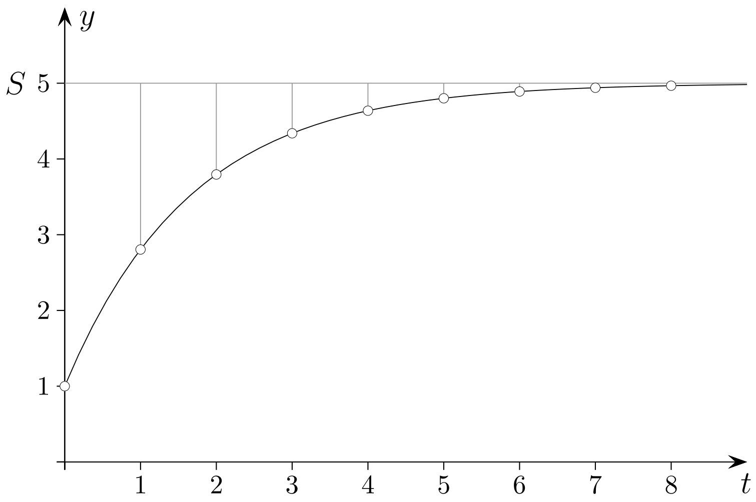
Bei exponentieller Abnahme ist die Abnahmegeschwindigkeit $f'(t)$ proportional zum vorhandenen Bestand $f(t)$.



⟵

begrenztes Wachstum
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = f(n) + \frac{p}{100}(S - f(n))$$



⟵

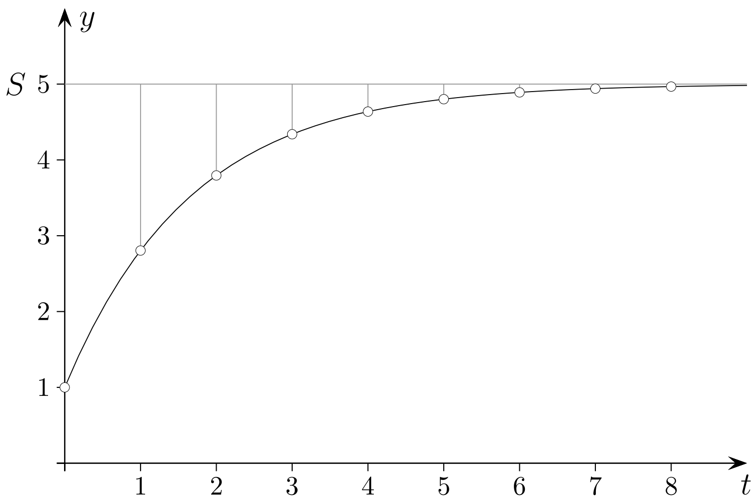
begrenztes Wachstum
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = f(n) + \frac{p}{100}(S - f(n))$$

$$f'(t) = k(S - f(t)), \qquad k > 0$$

$f'(t)$

Beim (einfachen) beschränkten Wachstum ist die Wachstumsgeschwindigkeit proportional zum Sättigungsmanko, d. h. dem Unterschied zwischen der aktuellen Sättigungsgrenze S und dem Bestand $f(t)$.

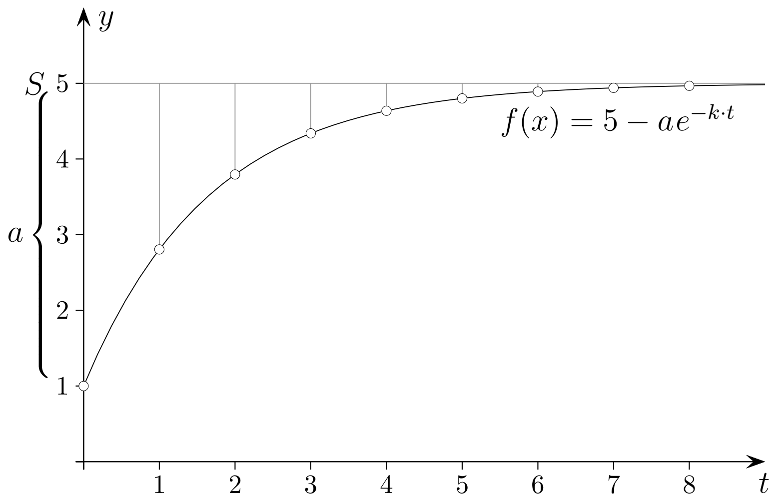


←

begrenztes Wachstum
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f(t) = S - ae^{-kt}, \quad f(0) = S - a$$

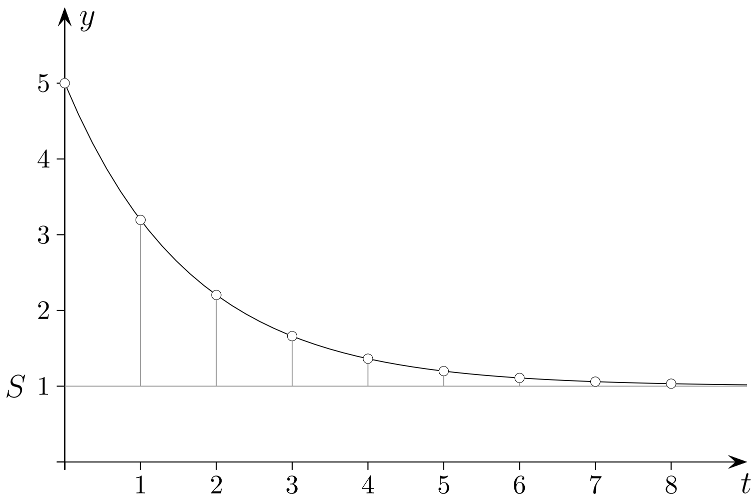
$$e^{-k} = 1 - \frac{p}{100} \qquad \text{siehe exponentielle Abnahme}$$



⟵

begrenzte(r) Abnahme (Zerfall)
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = f(n) - \frac{p}{100}(f(n) - S)$$



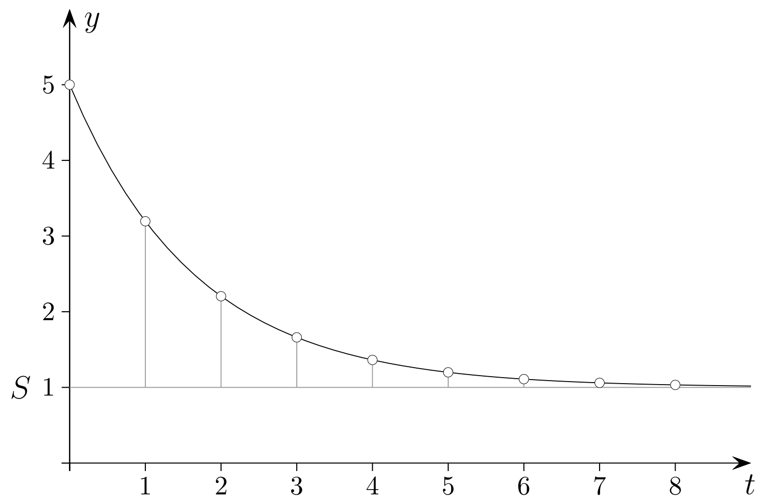
⟵

begrenzte(r) Abnahme (Zerfall)
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = f(n) - \frac{p}{100}(f(n) - S)$$

$$f'(t) = -k(f(t) - S), \qquad k > 0$$

Bei beschränkter Abnahme ist die Abnahmegeschwindigkeit $f'(t)$ proportional zum Sättigungsmanko, d. h. dem Unterschied zwischen dem aktuellen Bestand $f(t)$ und der Sättigungsgrenze S.



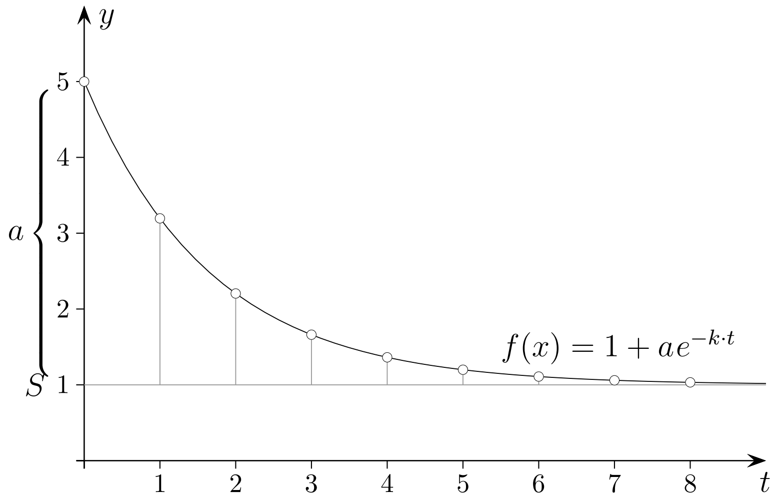
⟵

begrenzte(r) Abnahme (Zerfall)
iterativ, p% pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f'(t) = -k(f(t) - S), \quad k > 0$$

$$f(t) = S + ae^{-kt}, \quad f(0) = S + a$$

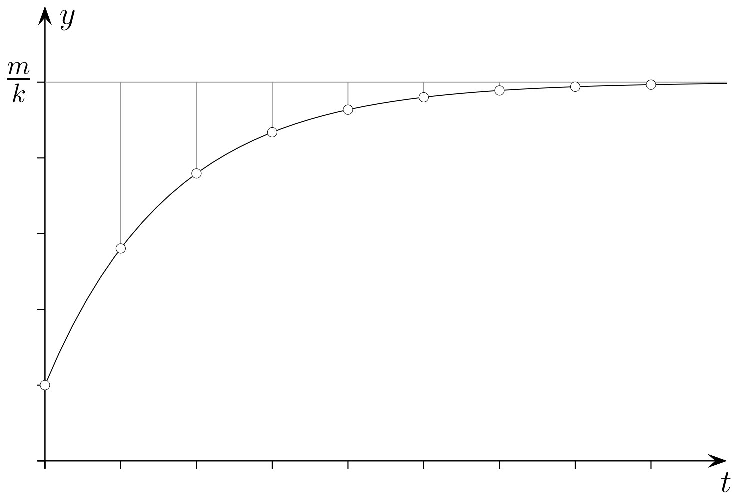
$$e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$$ siehe exponentielle Abnahme



←

linearer Zufluss, exponentieller Abfluss (z. B. Tropfinfusion)
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = -\frac{p}{100}f(n) + m$$



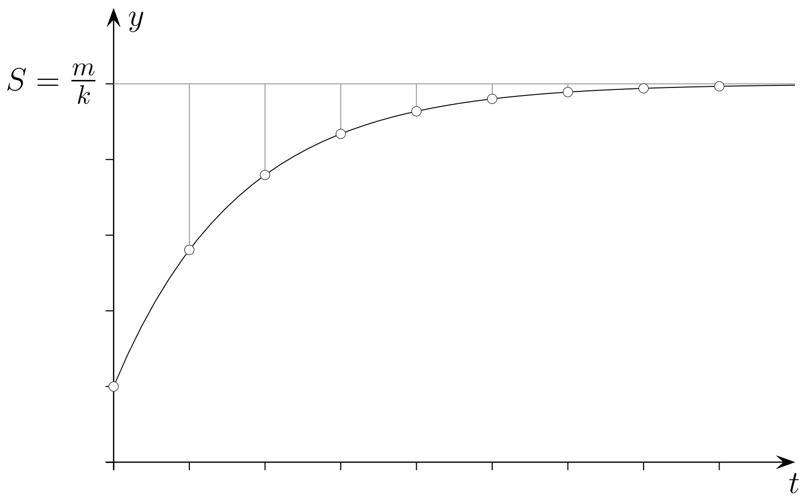
⟵

linearer Zufluss, exponentieller Abfluss (z. B. Tropfinfusion)
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = -\frac{p}{100} f(n) + m$$

$$f'(t) = -k f(t) + m, \qquad k > 0$$

$$f'(t) = k\left(\frac{m}{k} - f(t)\right)$$



⟵

Für S gilt:

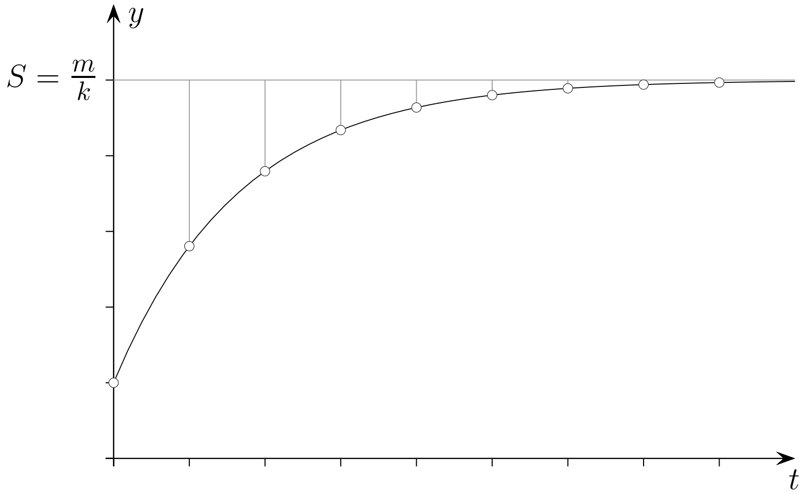
$$\begin{aligned} \textit{Abfluss} &= \textit{Zufluss} \\ k \cdot S &= m \\ S &= \frac{m}{k} \end{aligned}$$

linearer Zufluss, exponentieller Abfluss (z. B. Tropfinfusion)
iterativ, p% pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f'(t) = k\left(\frac{m}{k} - f(t)\right)$$

$$f(t) = \frac{m}{k} + ae^{-kt}, \quad f(0) = \frac{m}{k} + a$$

$$e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$$

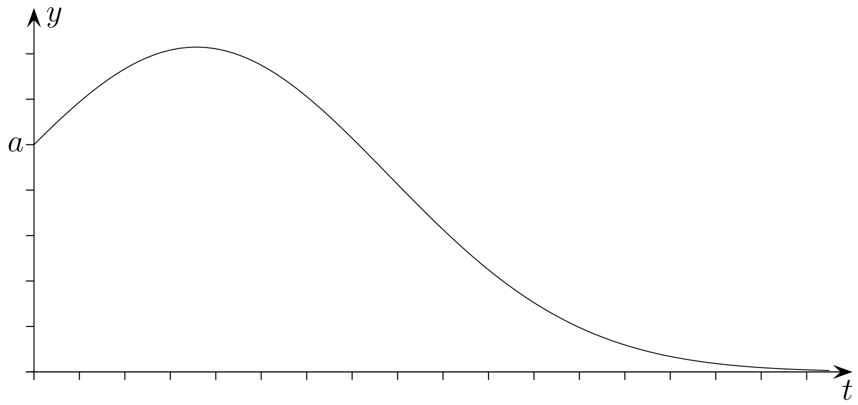


←

Vergiftetes Wachstum
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f'(t) = (g - s\,t) \cdot f(t)$$

Geburtenrate g
Sterberate $s\,t$ (proportional zur Zeit)



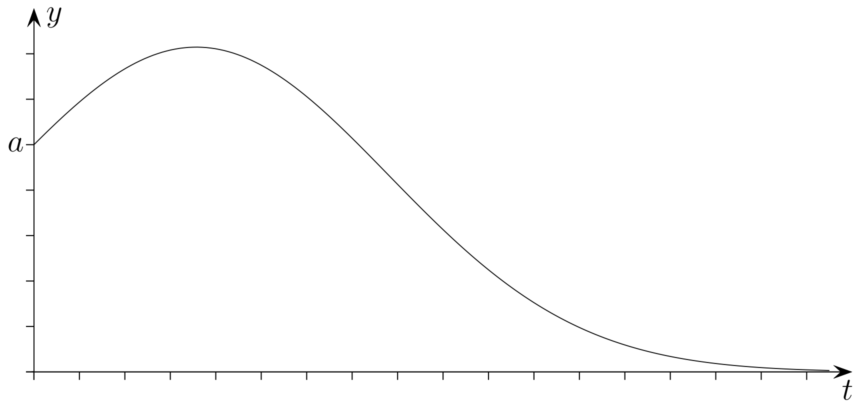
⟵

Vergiftetes Wachstum
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f'(t) = (g - s\,t) \cdot f(t)$$

$$f(t) = ae^{gt - \frac{1}{2}st^2}$$

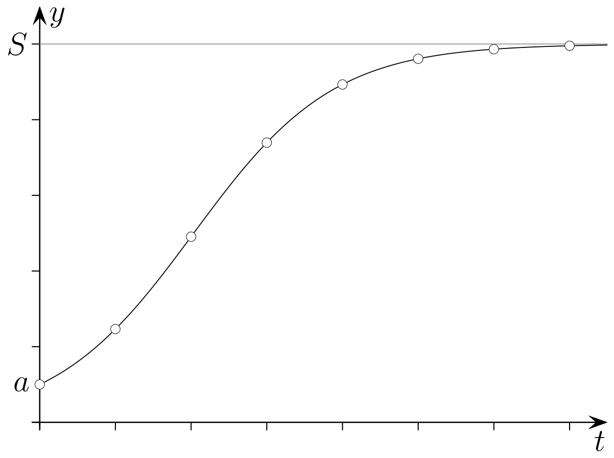
Geburtenrate g
Sterberate st (proportional zur Zeit)



⟵

logistisches Wachstum
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f(n+1) \;=\; f(n) + \frac{p}{100}\, f(n)\big(S - f(n)\big)$$



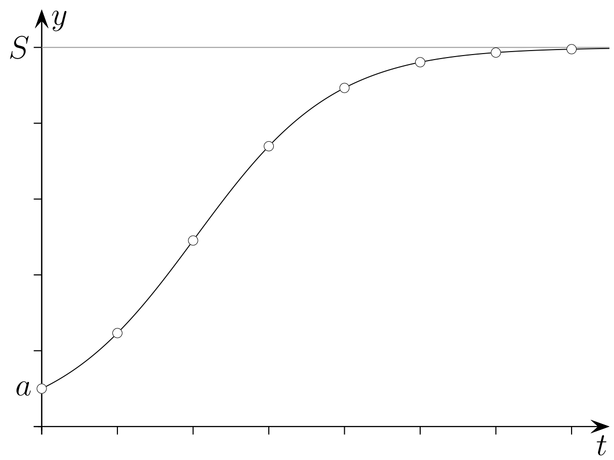
⟵

logistisches Wachstum
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f(n+1) = f(n) + \frac{p}{100} f(n)\big(S - f(n)\big)$$

$$f'(t) = k f(t)(S - f(t))$$

Beim logistischen Wachstum ist die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t)$ proportional zum Bestand $f(t)$ und zum Sättigungsmanko, d. h. dem Unterschied zwischen der Sättigungsgrenze S und dem aktuellen Bestand $f(t)$.

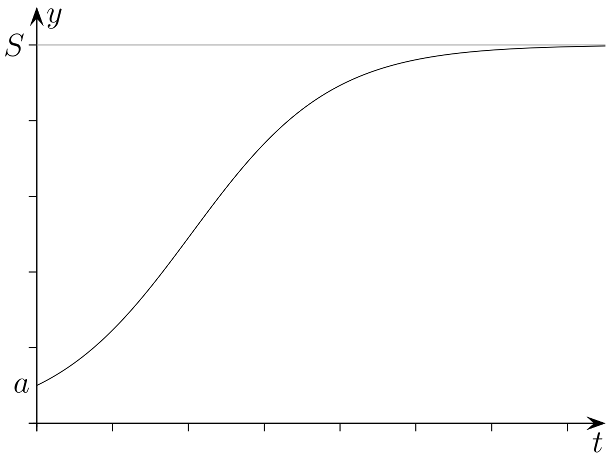


←

logistisches Wachstum
iterativ, $p\%$ pro Zeiteinheit
Differenzialgleichung
Funktionsgleichung

$$f'(t) = kf(t)(S - f(t))$$

$$f(t) = \frac{aS}{a + (S-a)e^{-kSt}}, \qquad f(0) = a$$



⟵

alternativ

$$f(t) = \frac{S}{1 + ae^{-kt}}, \qquad f(0) = \frac{S}{1+a}$$

$$f'(t) = \frac{k}{S} \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

a) $P(a \mid b)$ liegt auf dem Graphen von f $\qquad f(a) = b$

b) Nullstelle $x = a$

c) Extremum $E(a \mid b)$

d) Wendepunkt $W(a \mid b)$

e) Sattelpunkt $S(a \mid b)$

f) in $A(a \mid b)$ die Steigung m

g) Tangente $y = mx + b$ an der Stelle $x = a$

h) Steigungswinkel an der Stelle $x = a$ (z. B.) $\alpha = -20°$

i) 12 % Anstieg, d. h. 12 m Höhenzunahme je 100 m in x-Richtung

$\longleftarrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

a) $P(a \mid b)$ liegt auf dem Graphen von f

b) Nullstelle $x = a$ $\quad f(a) = 0$

c) Extremum $E(a \mid b)$

d) Wendepunkt $W(a \mid b)$

e) Sattelpunkt $S(a \mid b)$

f) in $A(a \mid b)$ die Steigung m

g) Tangente $y = mx + b$ an der Stelle $x = a$

h) Steigungswinkel an der Stelle $x = a$ (z. B.) $\alpha = -20°$

i) $12\,\%$ Anstieg, d. h. $12\,m$ Höhenzunahme je $100\,m$ in x-Richtung

$\longleftarrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

a) $P(a \mid b)$ liegt auf dem Graphen von f

b) Nullstelle $x = a$

c) Extremum $E(a \mid b)$ $f(a) = b$

$f'(a) = 0$

d) Wendepunkt $W(a \mid b)$

e) Sattelpunkt $S(a \mid b)$

f) in $A(a \mid b)$ die Steigung m

g) Tangente $y = mx + b$ an der Stelle $x = a$

h) Steigungswinkel an der Stelle $x = a$ (z. B.) $\alpha = -20°$

i) 12 % Anstieg, d. h. 12 m Höhenzunahme je 100 m in x-Richtung

⟵

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

a) $P(a \mid b)$ liegt auf dem Graphen von f

b) Nullstelle $x = a$

c) Extremum $E(a \mid b)$

d) Wendepunkt $W(a \mid b)$ $f(a) = b$

$f''(a) = 0$

e) Sattelpunkt $S(a \mid b)$

f) in $A(a \mid b)$ die Steigung m

g) Tangente $y = mx + b$ an der Stelle $x = a$

h) Steigungswinkel an der Stelle $x = a$ (z. B.) $\alpha = -20°$

i) 12 % Anstieg, d. h. 12 m Höhenzunahme je 100 m in x-Richtung

$\longleftarrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

a) $P(a \mid b)$ liegt auf dem Graphen von f

b) Nullstelle $x = a$

c) Extremum $E(a \mid b)$

d) Wendepunkt $W(a \mid b)$

e) Sattelpunkt $S(a \mid b)$

$f(a) = b$
$f''(a) = 0$
$f'(a) = 0$

f) in $A(a \mid b)$ die Steigung m

g) Tangente $y = mx + b$ an der Stelle $x = a$

h) Steigungswinkel an der Stelle $x = a$ (z. B.) $\alpha = -20°$

i) 12 % Anstieg, d. h. 12 m Höhenzunahme je 100 m in x-Richtung

$\longleftarrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

a) $P(a \mid b)$ liegt auf dem Graphen von f

b) Nullstelle $x = a$

c) Extremum $E(a \mid b)$

d) Wendepunkt $W(a \mid b)$

e) Sattelpunkt $S(a \mid b)$

f) in $A(a \mid b)$ die Steigung m — $f(a) = b$, $f'(a) = m$

g) Tangente $y = mx + b$ an der Stelle $x = a$

h) Steigungswinkel an der Stelle $x = a$ (z. B.) $\alpha = -20°$

i) 12 % Anstieg, d. h. 12 m Höhenzunahme je 100 m in x-Richtung

$\longleftarrow$

$\uparrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

a) $P(a \mid b)$ liegt auf dem Graphen von f

b) Nullstelle $x = a$

c) Extremum $E(a \mid b)$

d) Wendepunkt $W(a \mid b)$

e) Sattelpunkt $S(a \mid b)$

f) in $A(a \mid b)$ die Steigung m

g) Tangente $y = mx + b$ an der Stelle $x = a$ $\quad f(a) = ma + b$

$f'(a) = m$

h) Steigungswinkel an der Stelle $x = a$ (z. B.) $\alpha = -20°$

i) 12 % Anstieg, d. h. 12 m Höhenzunahme je 100 m in x-Richtung

$\longleftarrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

a) $P(a \mid b)$ liegt auf dem Graphen von f

b) Nullstelle $x = a$

c) Extremum $E(a \mid b)$

d) Wendepunkt $W(a \mid b)$

e) Sattelpunkt $S(a \mid b)$

f) in $A(a \mid b)$ die Steigung m

g) Tangente $y = mx + b$ an der Stelle $x = a$

h) Steigungswinkel an der Stelle $x = a$ (z. B.) $\alpha = -20°$ $\quad f'(a) = \tan(\alpha)$

i) 12 % Anstieg, d. h. 12 m Höhenzunahme je 100 m in x-Richtung

$\longleftarrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Bedingungen

a) $P(a \mid b)$ liegt auf dem Graphen von f

b) Nullstelle $x = a$

c) Extremum $E(a \mid b)$

d) Wendepunkt $W(a \mid b)$

e) Sattelpunkt $S(a \mid b)$

f) in $A(a \mid b)$ die Steigung m

g) Tangente $y = mx + b$ an der Stelle $x = a$

h) Steigungswinkel an der Stelle $x = a$ (z. B.) $\alpha = -20°$

i) 12 % Anstieg, d. h. 12 m Höhenzunahme je 100 m in x-Richtung $m = 0{,}12$

$\longleftarrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

a) y-achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades $f(x) = ax^2 + b$

b) y-achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades

c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades

d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades

e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades

f) Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

$\longleftarrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

a) y-achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades

b) y-achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades

d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades

e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades

f) Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

$\longleftarrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

a) y-achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades

b) y-achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades

c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx$

d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades

e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades

f) Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

$\longleftarrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

a) y-achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades

b) y-achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades

c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades

d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades $f(x) = ax^3 + bx$

e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades

f) Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

$\longleftarrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

a) y-achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades

b) y-achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades

c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades

d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades

e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$

f) Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

$\longleftarrow$

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ansatz

ganzrationale Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

a) y-achsensymmetrisch, höchstens 3. Grades

b) y-achsensymmetrisch, höchstens 4. Grades

c) punktsym. zum Ursprung, höchstens 3. Grades

d) punktsym. zum Ursprung, höchstens 4. Grades

e) punktsym. zum Ursprung, höchstens 5. Grades

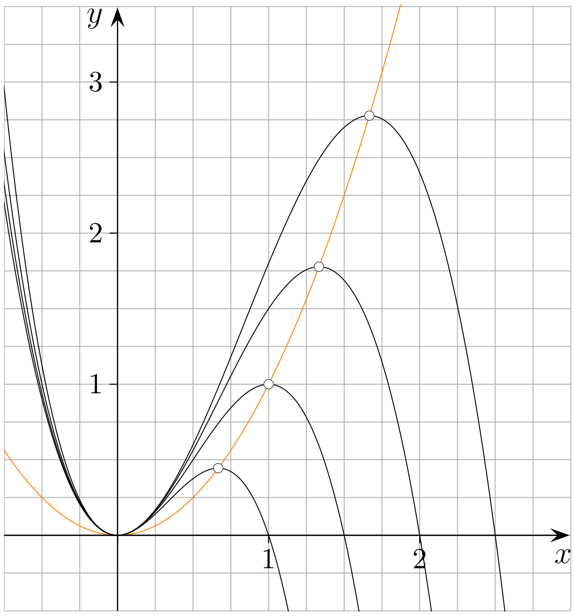
f) Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bedingungen und dem Grad des Polynoms

Die Anzahl der Bedingungen liefert einen Hinweis auf den (maximalen) Grad des Polynoms. Für n Bedingungen ist der Ansatz mit einem Polynom vom Grad $n-1$ sinnvoll.
Für einen symmetrischen Ansatz werden nur diejenigen Bedingungen gezählt, die sich entweder rechts oder links von der y-Achse (einschließlich) ergeben.
Wenn die Bedingungen nur notwendig sind, muss überprüft werden, ob die Funktion das Ausgangsproblem löst. Ein unterbestimmtes Gleichungssystem (Anzahl der Gleichungen ist kleiner als die Anzahl der Variablen) führt zu einer Funktionenschar.

⟵

Gegeben ist die Funktionenschar:

$f_k(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{k}x^3, \quad k > 0.$



Für sie gilt:

$$Max\Big(\underbrace{\tfrac{2}{3}k}_{x} \,|\, \underbrace{\tfrac{4}{9}k^2}_{y}\Big)$$

Um die Funktion zu ermitteln, auf derem Graph (Ortskurve) die Maxima liegen, eliminieren wir k.

$$x = \frac{2}{3}\,k$$

indem wir die 1. Gleichung nach

$$y = \frac{4}{9}\,k^2$$

k

auflösen und anschließend den Term für k in die 2. Gleichung einsetzen. Wir erhalten:

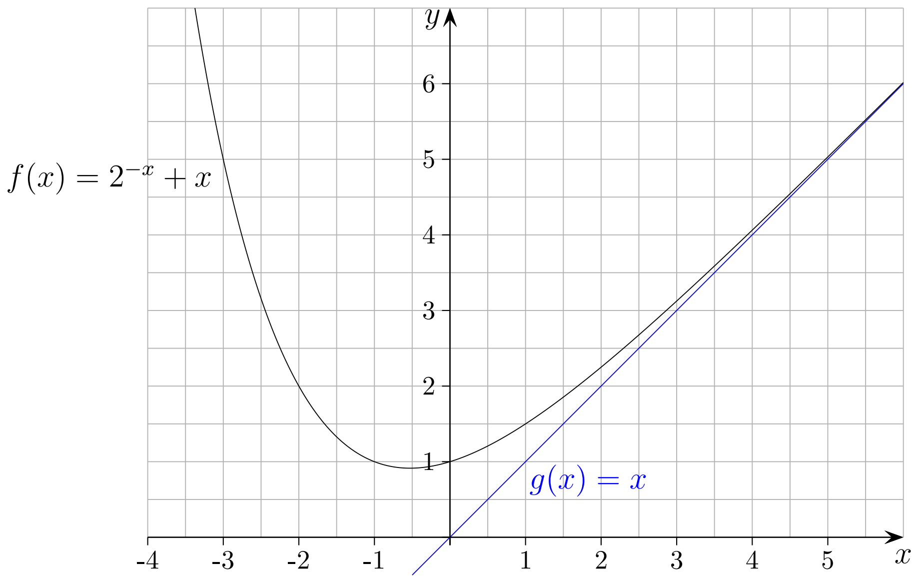
$$y = x^2$$

←

Eine Gerade $g(x) = mx + b$ heißt *Asymptote* der Funktion f, falls

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - g(x)) = 0 \quad \text{gilt.}$$

Eine Funktion kann zwei Asymptoten besitzen,
$x \to \infty$ und $x \to -\infty$ sind beides zu untersuchen.
Der häufigste Fall ist, dass die Asymptote parallel zur x-Achse liegt. Die Asymptote $y = a$ wird dann durch die Bestimmung von $a = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ bzw. $a = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ gewonnen.



⟵

$f(x) = x^5 - x + 1$	$f'(x) = 5x^4 - 1$
$f(x) = x^2(x^4 - 1)$	
$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = e^{g(x)}$	
$f(x) = xe^{-x}$	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	
$f(x) = \ln x$	
$f(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	

⟵

$f(x) = x^5 - x + 1$	
$f(x) = x^2(x^4 - 1)$	$f'(x) = 6x^5 - 2x$
$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = e^{g(x)}$	
$f(x) = xe^{-x}$	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	
$f(x) = \ln x$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	

$\longleftarrow$

$f(x) = x^5 - x + 1$	
$f(x) = x^2(x^4 - 1)$	
$f(x) = e^{-x^2}$	$f'(x) = -2xe^{-x^2}$
$f(x) = e^{g(x)}$	
$f(x) = xe^{-x}$	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	
$f(x) = \ln x$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	

$\longleftarrow$

$f(x) = x^5 - x + 1$	
$f(x) = x^2(x^4 - 1)$	
$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)}g'(x)$
$f(x) = xe^{-x}$	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	
$f(x) = \ln x$	
$f(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	

$\longleftarrow$

$f(x) = x^5 - x + 1$	
$f(x) = x^2(x^4 - 1)$	
$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = e^{g(x)}$	
$f(x) = xe^{-x}$	$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	
$f(x) = \ln x$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	

$\longleftarrow$

$f(x) = x^5 - x + 1$	
$f(x) = x^2(x^4 - 1)$	
$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = e^{g(x)}$	
$f(x) = xe^{-x}$	
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	
$f(x) = \ln x$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	

$\longleftarrow$

$f(x) = x^5 - x + 1$	
$f(x) = x^2(x^4 - 1)$	
$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = e^{g(x)}$	
$f(x) = x e^{-x}$	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \ln x$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	

$\longleftarrow$

$f(x) = x^5 - x + 1$	
$f(x) = x^2(x^4 - 1)$	
$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = e^{g(x)}$	
$f(x) = xe^{-x}$	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	

⟵

$f(x) = x^5 - x + 1$	
$f(x) = x^2\,(x^4 - 1)$	
$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = e^{g(x)}$	
$f(x) = x\,e^{-x}$	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	
$f(x) = \ln x$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	

$\longleftarrow$

$f(x) = x^5 - x + 1$	
$f(x) = x^2(x^4 - 1)$	
$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = e^{g(x)}$	
$f(x) = x\,e^{-x}$	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	
$f(x) = \ln x$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

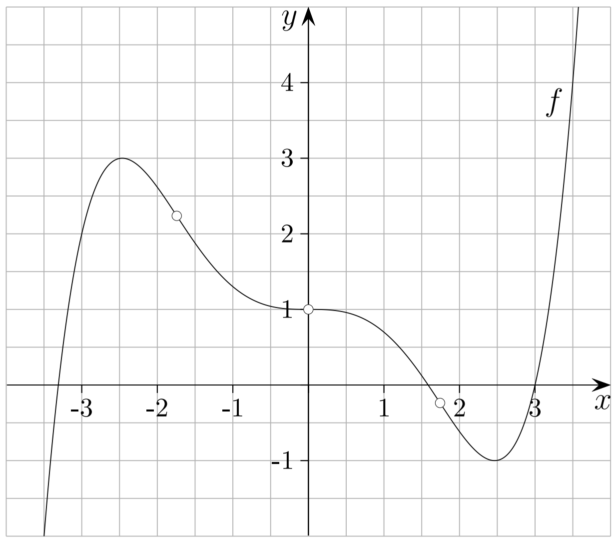
$\longleftarrow$

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen.

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 \ldots$$ Parabel hat höchstens 2 Nullstellen.

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 \ldots$$ Kubische Funktion hat höchstens 3 Nullstellen.

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = x^4 \ldots$$



Der abgebildete Graph hat 3 Wendepunkte.
$f''(x) = 0$ muss mindestens 3 Nullstellen besitzen. f'' hat mindestens den Grad 3.
Aufleiten erhöht den Grad um 1.
Die ganzrationale Funktion f muss daher mindestens vom Grad 5 sein.
Der Grad muss ungerade sein, beachte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens $n-2$ Wendepunkte.

⟵

Ableitungsregeln

Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' =$

Kettenregel $\Big(u(v(x))\Big)' =$

$(a^x)' =$

$\longleftarrow$

$$f(x) = (1-x)e^x$$
$$f'(x) = -xe^x$$

Ableitungsregeln

Produktregel	$(uv)' \;=$
Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Kettenregel	$\big(u(v(x))\big)' =$
	$\big(a^x\big)' =$

⟵

$$f(x) = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{x-2}{e^x}$$

Ableitungsregeln

Produktregel	$(uv)'$	$=$	
Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)'$	$=$	
Kettenregel	$\big(u(v(x))\big)'$	$=$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$
	$(a^x)'$	$=$	

$\longleftarrow$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{1-x} \\ f'(x) &= -e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{x^2-1} \\ f'(x) &= (1+2x^2)e^{x^2-1} \end{aligned}$$

Ableitungsregeln

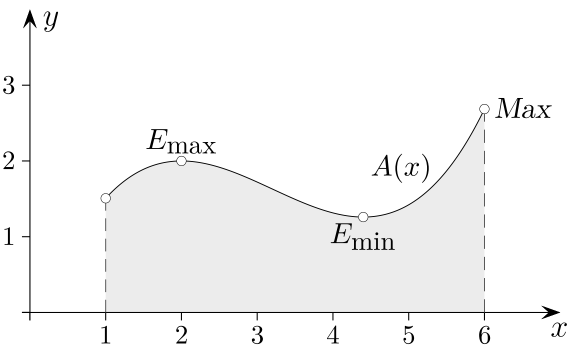
Produktregel	$(uv)'$	$=$
Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)'$	$=$
Kettenregel	$\big(\ u(v(x))\big)'$	$= u'(v(x)) \cdot v'(x)$
	$\left(a^x\right)'$	$= a^x \ln(a)$

$\longleftarrow$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a^x = e^{\ln(a)\cdot x} \\
f'(x) &= e^{\ln(a)\cdot x} \ln(a) \\
&= a^x \ln(a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2^x \\
f'(x) &= 2^x \ln(2) \\
&= 2^x \cdot 0{,}6931\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3^x \\
f'(x) &= 3^x \ln(3) \\
&= 3^x \cdot 1{,}0986\ldots
\end{aligned}
$$



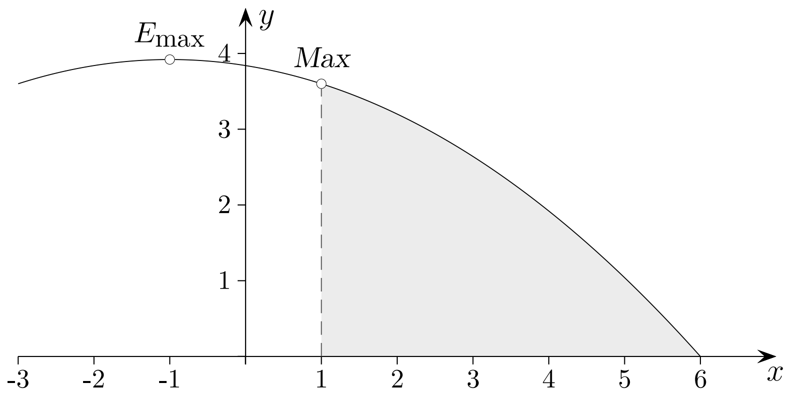
In Extremwertaufgaben wird der größte bzw. kleinste Funktionswert auf einem Intervall gesucht. Mit der Differentialrechnung können die lokalen Extrema $E_{\max}$ und $E_{\min}$ ermittelt werden.
Es bleibt zu prüfen, ob am Rand des Definitionsbereichs noch größere bzw. kleinere Funktionswerte vorliegen.

Wo befinden sich die globalen Extrema der Funktion $A(x),\ 1 \leq x \leq 6\,$?

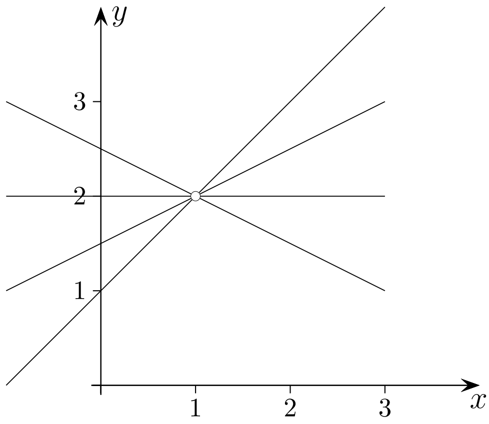
⟵

Das globale Maximum ist *Max*, das globale Minimum stimmt mit dem lokalen $E_{\min}$ überein.

Das Maximum der Funktionswerte wird z. B. auf dem Rand angenommen, wenn das einzige lokale Maximum außerhalb des Definitionsbereichs liegt.



$E_{\max}$
Max
y
x
4
3
2
1
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6

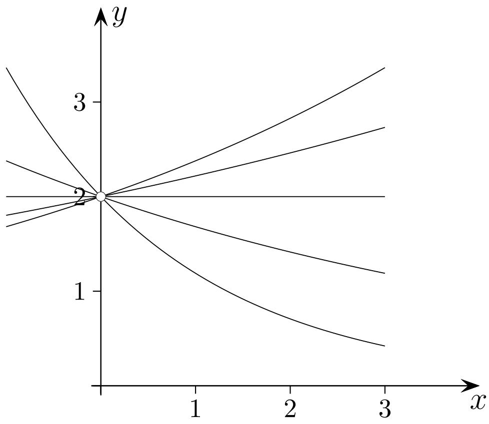


$$
\begin{aligned}
y &= (2-k)\cdot x + k \\
&= 2x - kx + k
\end{aligned}
$$

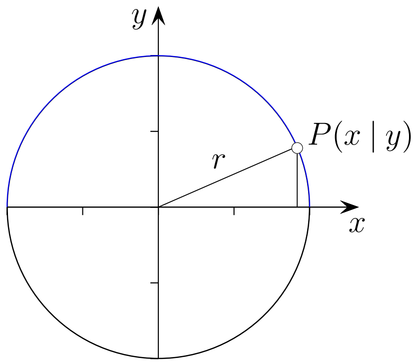
$$
\begin{aligned}
0 &= -kx + k \\
x &= 1 \qquad P(1 \mid 2)
\end{aligned}
$$

Wenn es einen gemeinsamen Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ gibt, kann y_0 nicht von k abhängen.
x_0 ist so zu wählen, dass der kleinste Term, der x_0 und k enthält, herausfällt (null ergibt).

⟵



$$f_k(x) = 2^{1-kx}$$
$$kx = 0$$
$$x = 0 \qquad P(0 \mid 2)$$



Für jeden Punkt $P(x \mid y)$ auf dem Kreis mit dem Radius r gilt:

$x^2 + y^2 = r^2$ (Pythagoras).

Nach y aufgelöst ergibt sich: $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

Diese Beziehung wird Relation genannt.

Für eine Funktion muss eine eindeutige Zuordnung gegeben sein:

$$
\begin{aligned}
f_{\text{oben}}(x) &= \sqrt{r^2 - x^2} \\
f_{\text{unten}}(x) &= -\sqrt{r^2 - x^2}
\end{aligned}
$$

Man beachte den Definitionsbereich $-r \leq x \leq r$.

Die Ableitung wird mit der Kettenregel ermittelt.

$$
\begin{aligned}
f_{\text{oben}}(x) &= \sqrt{r^2 - x^2} \\
f'_{\text{oben}}(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}
\end{aligned}
$$

alternativ

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2 \qquad \mid (\ )' \\
2x + 2yy' &= 0 \\
y' &= \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \qquad\qquad y = f_{\text{oben}}(x)
\end{aligned}
$$

Diese Art des Ableitens heißt implizites Differenzieren.

←