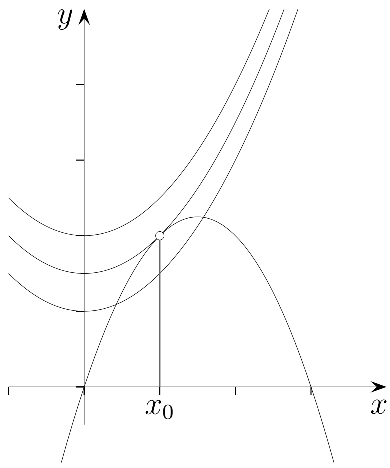
Berühren von Graphen



Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = -x^2 + 3x$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + a$$

Wie ist das a zu wählen, damit sich die Graphen berühren?

Die Berührbedingungen lauten:

1. $f(x_0) = g(x_0)$
2. $f'(x_0) = g'(x_0)$

Die 1. Bedingung besagt, dass die Funktionswerte an der Stelle x_0 gleich sind,
die 2. Bedingung beinhaltet, dass die Tangentensteigungen im Berührpunkt übereinstimmen.

Für die obige Aufgabe ergibt sich somit:

1. $-x_0^2 + 3x_0 = \frac{1}{2}x_0^2 + a$
2. $-2x_0 + 3 = x_0$

aus 2. folgt:

$$3 = 3x_0$$

$$x_0 = 1$$

und in 1. eingesetzt:

$$-1 + 3 = \frac{1}{2} + a$$

$$2 = \frac{1}{2} + a$$

$$a = \frac{3}{2}$$

1. In welchen Punkten berühren sich die Graphen der Funktionen?

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x$$

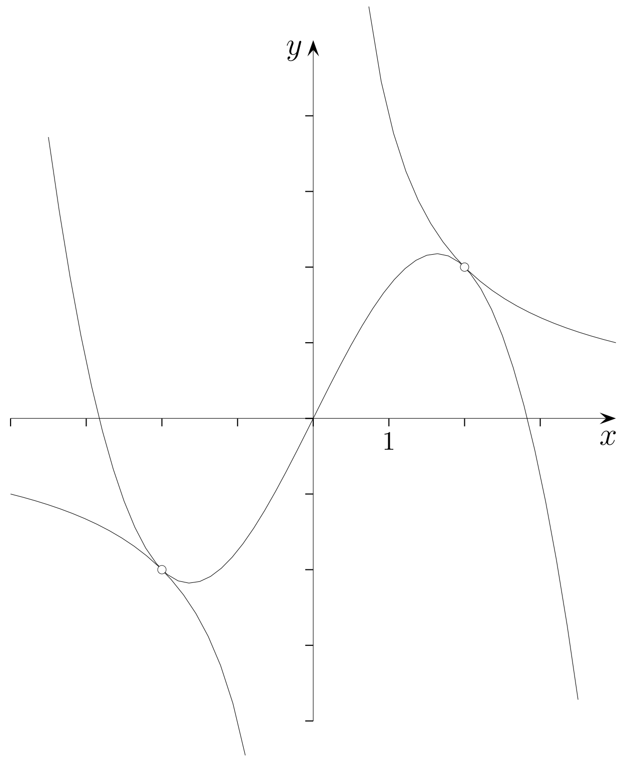
$$g(x) = \frac{4}{x}$$

2. Welche Geraden durch den Punkt $A(0 \mid -1)$ berühren den Graph der Funktion $f(x) = x^2$?

Berühren von Graphen

1. In welchen Punkten berühren sich die Graphen der Funktionen?

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x$$
$$g(x) = \frac{4}{x}$$



Die Berührbedingungen lauten:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & \frac{4}{x} & = & -\frac{1}{4}x^3 + 2x \\ 2. & -\frac{4}{x^2} & = & -\frac{3}{4}x^2 + 2 \\ \hline 1. & 4 & = & -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 \\ 2. & -4 & = & -\frac{3}{4}x^4 + 2x^2 \\ \hline \end{array}$$

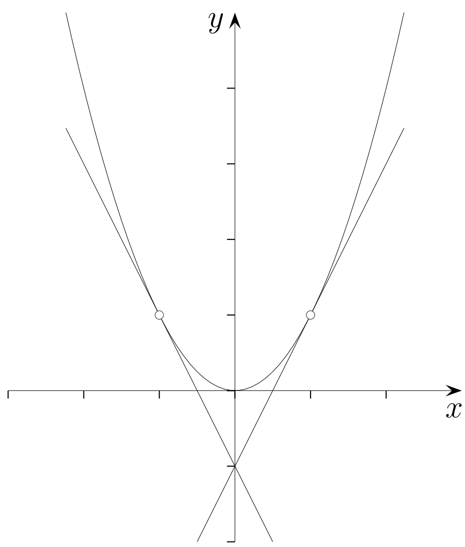
$$\Longrightarrow \quad 8 = \frac{1}{2}x^4 \quad \Longrightarrow \quad B_{1/2}(\pm 2 \mid \pm 2)$$

2. Welche Geraden durch den Punkt $A(0 \mid -1)$ berühren den Graph der Funktion $f(x) = x^2$?

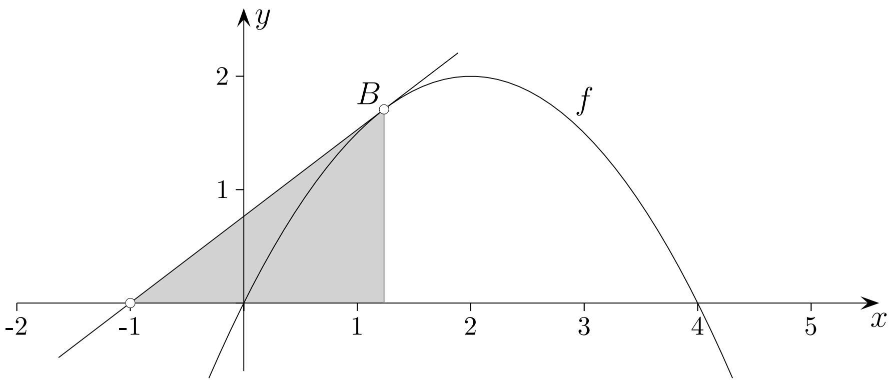
Die Berührbedingungen lauten:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & mx - 1 & = & x^2 \\ 2. & m & = & 2x \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad x_{1/2} = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad m_{1/2} = \pm 2$$

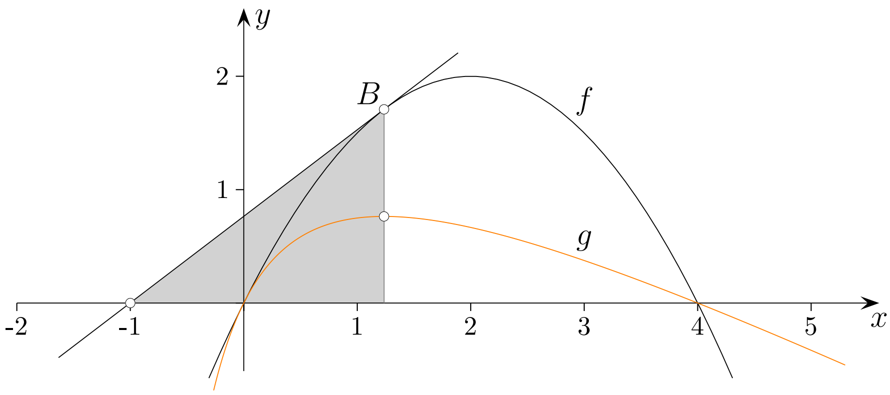


Berühren von Graphen



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x(x-4)$.
Welche Gerade durch $A(-1 \mid 0)$ mit positiver Steigung
berührt den Graphen von f?
Ermittle auch den Berührpunkt B.

Berühren von Graphen



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x(x-4)$.
Welche Gerade durch $A(-1 \mid 0)$ mit positiver Steigung berührt den Graphen von f?
Ermittle auch den Berührpunkt B.

Suche die maximale Steigung, also das Maximum (GTR) der Funktion $g(x) = \dfrac{f(x)}{x+1}$.

$x = 1{,}236$, $y = 0{,}764$

Tangentengleichung: $y = 0{,}764(x+1)$

Der Berührpunkt lautet $B(1{,}236 \mid 1{,}708)$.

Zeige:
Es gibt genau zwei verschiedene Funktionen mit derselben zweiten Ableitung $f''(x) = \frac{3}{16}x - 1$, deren Graphen durch den Ursprung des Koordinatensystems gehen und die x-Achse berühren.

Zeige:
Es gibt genau zwei verschiedene Funktionen mit derselben zweiten Ableitung $f''(x) = \frac{3}{16}x - 1$, deren Graphen durch den Ursprung des Koordinatensystems gehen und die x-Achse berühren.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3}{16}x - 1 \\ f'(x) &= \frac{3}{32}x^2 - x + C \\ f(x) &= \frac{1}{32}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + Cx \qquad \text{beachte } f(0) = 0 \end{aligned}$$

Für die Berührstellen gilt:

$$\begin{aligned} &1. & f'(x) &= 0 \\ &2. & \frac{3}{32}x^2 - x + C &= 0 \\ &3. & f(x) &= 0 \\ &4. & \frac{1}{32}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + Cx &= 0 \end{aligned}$$

Gleichung 2 nach C umstellen und den Term für C in Gleichung 3 einsetzen.
Ergebnis (vereinfacht): $x^2(8 - x) = 0$
$x_1 = 0$ und $x_2 = 8$ ergeben $C_1 = 0$ und $C_2 = 2$.