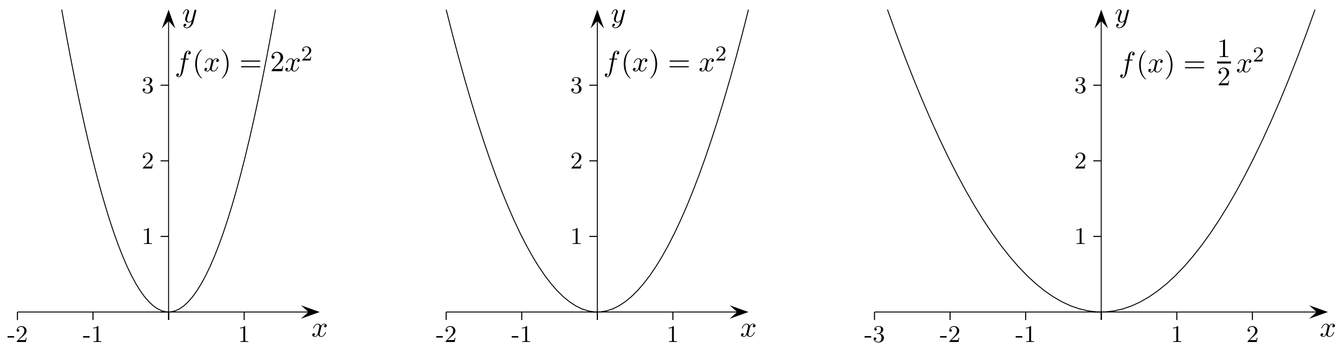
2. Ableitung Krümmung



Betrachten wir die unterschiedliche Krümmung der Parabeln $f(x) = a\,x^2$ an der Stelle $x = 0$.

Der Faktor a bestimmt offensichtlich die Stärke der Krümmung.
Es gilt, wie sich leicht nachrechnen lässt, $a = \frac{1}{2} f''(0)$.

Anders formuliert: Je größer die 2. Ableitung ist, desto stärker ist die Krümmung.

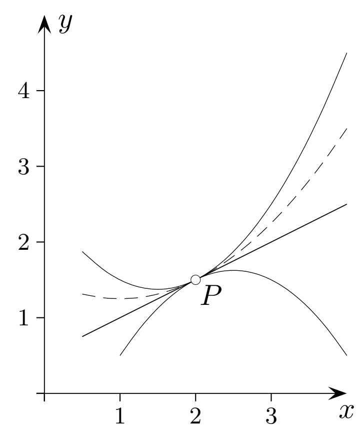
Die Tangentensteigung $f'(x_0)$ bestimmt den Anstieg einer Funktion an der Stelle x_0 .

$f''(x_0)$ bestimmt den Anstieg der Funktion $f'(x)$ in einer Umgebung von x_0 und damit die Krümmung von f an dieser Stelle.

Die nebenstehende Grafik enthält eine Strecke mit der Steigung $m = \frac{1}{2}$.

Weiter sind Parabelbögen mit $f''(2) = 0{,}5$, $f''(2) = 1$ und $f''(2) = -1$ gezeichnet, die durch P verlaufen und an der Stelle $x = 2$ die Steigung m haben.

Ordne den Parabelbögen die 2. Ableitungswerte zu.



Ist $f''(x_0) > 0$, so steigt $f'(x)$ in einer Umgebung von x_0 an.
Der Graph von f ist hier linksgekrümmt. Er liegt oberhalb der Tangente.

Ist $f''(x_0) < 0$, so fällt $f'(x)$ in einer Umgebung von x_0.
Der Graph von f ist hier rechtsgekrümmt. Er liegt unterhalb der Tangente.

In einem Wendepunkt geht eine Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung (oder umgekehrt) über.
Daher ist $f''(x_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunkts.

Ausblick: Für $f(x) = x^2$ gilt $f''(x) = 2$. Offensichtlich nimmt die Krümmung der Parabel vom Ursprung ausgehend mit größer bzw. kleiner werdenden x-Werten ab. Dies zeigt, dass die zweite Ableitung noch nicht allgemein die Stärke der Krümmung erfasst.

Koeffizienten eines Polynoms

Zeige:
Für die ganzrationale Funktion vom Grad n

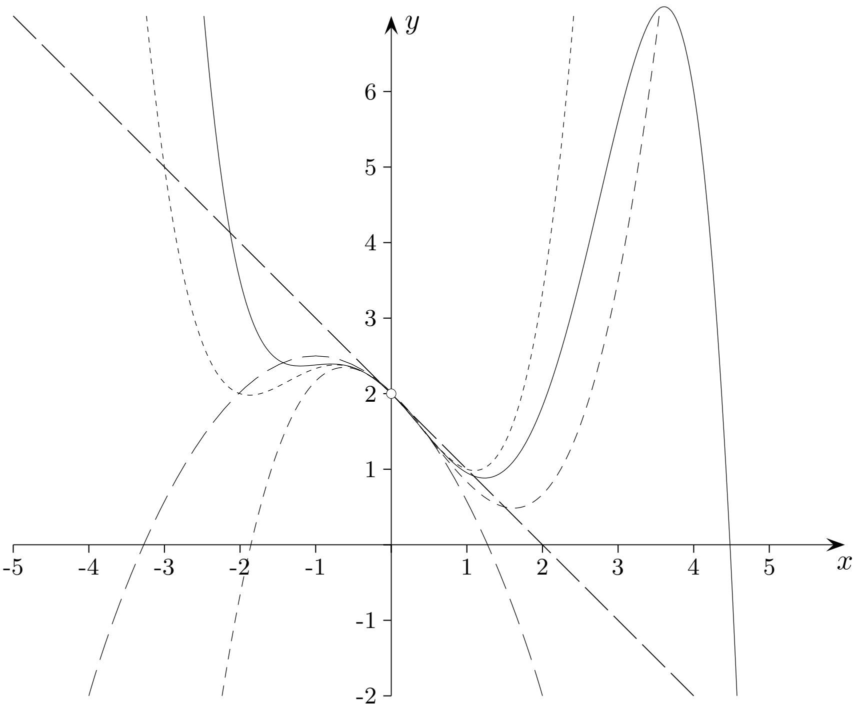
$$f(x) = a_n x^n + \ \dots \ + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

besteht zwischen den Koeffizienten und den Ableitungen an der Stelle null folgender Zusammenhang:

$$f(0) = a_0; \quad f'(0) = a_1; \quad f''(0) = 2a_2; \quad f'''(0) = 3!\,a_3; \quad ... \ ; \ f^{(n)}(0) = n!\,a_n$$

so dass gilt:

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \dots + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'(0)}{1!}\,x + f(0)$$



Ordne den Graphen die Funktionen zu
und beschreibe den vorliegenden Sachverhalt.

$$f(x) = -\frac{3}{64}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

$$f_1(x) = -x + 2$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

$$f_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

$$f_4(x) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$