

Das Tangentenproblem Fortsetzung

Eine wesentliche Vereinfachung der Berechnung von Tangentensteigungen liegt in Folgendem:
Für die x -Koordinaten der Punktfolge:

$Q_1(3 |)$, $Q_2(2,5 |)$, $Q_3(2 |)$, $Q_4(1,5 |)$, $Q_5(1,1 |)$, $Q_6(1,01 |)$, $Q_7(1,001 |)$, ... gilt:

$$\begin{array}{ll} 3 = 1 + h_1 & \text{mit } h_1 = 2 \\ 2,5 = 1 + h_2 & h_2 = 1,5 \\ 2 = 1 + h_3 & h_3 = 1 \\ 1,5 = 1 + h_4 & h_4 = 0,5 \\ 1,1 = 1 + h_5 & h_5 = 0,1 \\ 1,01 = 1 + h_6 & h_6 = 0,01 \end{array}$$

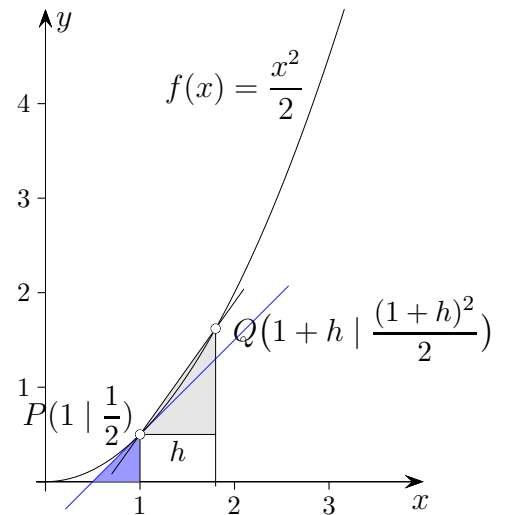
Die Punktfolge kann mit $Q(1 + h | \frac{1}{2}(1 + h)^2)$ beschrieben werden, wobei h gegen null strebt.

Für die Sekantensteigung ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} m_{\text{Sekante}} &= \frac{\frac{1}{2}(1 + h)^2 - \frac{1}{2}}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1 + 2h + h^2) - \frac{1}{2}}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}}{h} \end{aligned}$$

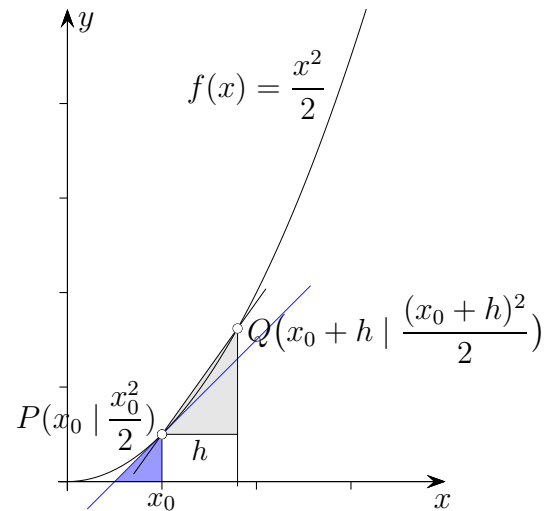
$$m_{\text{Sekante}} = 1 + \frac{1}{2}h$$

$$m_{\text{Tangente}} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{2}h) = 1$$



Diese Überlegungen können verallgemeinert werden. Um die Tangentensteigung im Punkt $P(x_0 | \frac{1}{2}x_0^2)$ zu erhalten, wird zunächst wieder die Steigung der Sekante durch P und $Q(x_0 + h | \frac{1}{2}(x_0 + h)^2)$ betrachtet.

Tangentensteigung an der Stelle x_0

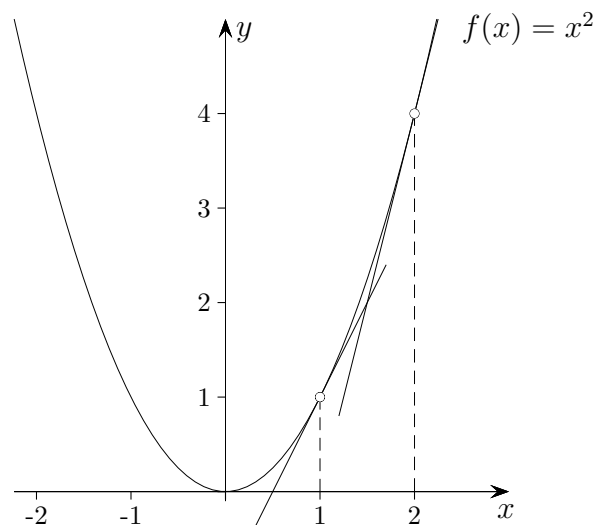


$$\begin{aligned} m_{\text{Sekante}} &= \frac{\frac{1}{2}(x_0 + h)^2 - \frac{1}{2}x_0^2}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x_0^2 + 2x_0h + h^2) - \frac{1}{2}x_0^2}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x_0^2 + x_0h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}x_0^2}{h} \end{aligned}$$

$$m_{\text{Sekante}} = x_0 + \frac{1}{2}h$$

$$m_{\text{Tangente}} = \lim_{h \rightarrow 0} (x_0 + \frac{1}{2}h) = x_0$$

Das Tangentenproblem, Zusammenhänge entdecken



Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2$.

Um den Zusammenhang von x -Wert und der Steigung der Tangente an der Stelle x zu erkennen, ermitteln wir mit dem GTR die Tangentengleichungen für verschiedene Stellen.

Hierzu ist der Graph von f zu zeichnen, dann `2nd DRAW | 5: Tangent(1 ENTER` für die Stelle 1 eingeben, weiter mit `2nd DRAW | 5: Tangent(2 ENTER` für die Stelle 2, usw.

Der GTR liefert:

Stelle x	Tangentengleichung
1	$y = 2x - 1$
2	$y = 4x - 4$
3	$y = 6x - 9$
4	$y = 8x - 16$

Wir erahnen:

Für die Funktion $f(x) = x^2$ ist die Tangentensteigung an der Stelle x vermutlich $m_{\text{Tangente}} = 2x$.

Entsprechend ermitteln wir für die Funktion $f(x) = x^3$:

Stelle x	Tangentengleichung
1	$y = 3x - 2$
2	$y = 12x - 16$
3	$y = 27x - 54$
4	$y = 48x - 128$
5	$y = 75x - 250$

Für die Funktion $f(x) = x^3$ ist die Tangentensteigung an der Stelle x vermutlich $m_{\text{Tangente}} = 3x^2$.