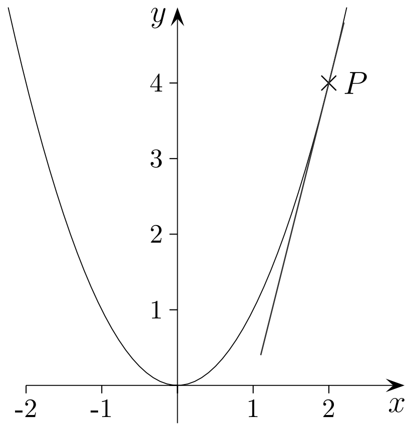
Tangentengleichung



Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$.
Gesucht ist die Gleichung der Tangente im Punkt $P\big(\,2\,|\,?\,\big)$.

Um die Tangentengleichung $y = mx + b$ für den Punkt P aufstellen zu können, benötigen wir neben der x-Koordinate auch die y-Koordinate von P, sowie die Steigung m der Tangente in diesem Punkt. Die y-Koordinate ergibt sich stets durch Einsetzen der x-Koordinate in die Funktionsgleichung von f:

$$y = f(2) = 4, \text{ also } P\big(\,2\,|\,4\,\big).$$

Die Tangentensteigung m erhalten wir, indem wir die x-Koordinate von P in die 1. Ableitung von f einsetzen:

$$f'(x) = 2x, \text{ damit ergibt sich: } \quad m = f'(2) = 4.$$

Wir erhalten zunächst: $\quad y = 4x + b$.

Um b zu bestimmen, setzen wir die x- und die y-Koordinate des Punktes $P\big(\,2\,|\,4\,\big)$ in die Geradengleichung ein und lösen nach b auf.

$$\begin{aligned} y &= 4x + b \\ 4 &= 4 \cdot 2 + b \\ 4 &= 8 + b \\ b &= -4 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt das die Tangentengleichung: $\quad y = 4x - 4$.

Eine Gerade mit der Gleichung $y = mx + b$ besteht bekanntlich aus allen Punkten $P\big(\,x\,|\,y\,\big)$, deren x- und y-Koordinate die Gleichung erfüllen. Weil $P\big(\,2\,|\,4\,\big)$ auf der Geraden liegt, erfüllen seine Koordinaten die Gleichung.

Zur weiteren Übung:
Stelle die Tangentengleichungen für die Punkte A und B auf:

a) $f(x) = x^3 - 2x \qquad A\big(\,3\,|\,?\,\big) \qquad B\big(\,\frac{1}{2}\,|\,?\,\big)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x \qquad A\big(\,-1\,|\,?\,\big) \qquad B\big(\,-\frac{1}{2}\,|\,?\,\big)$

c) $f(x) = x^2 - 4x \qquad A\big(\,a\,|\,?\,\big) \qquad B\big(\,-2a\,|\,?\,\big)$

Tangentengleichung

Lösungen:

a) $A\big(3 \mid 21\big)$ $\quad y = 25x - 54$

$B\big(\frac{1}{2} \mid -\frac{7}{8}\big)$ $\quad y = -\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$

b) $A\big(-1 \mid -\frac{5}{2}\big)$ $\quad y = x - \frac{3}{2}$

$B\big(-\frac{1}{2} \mid -\frac{47}{32}\big)$ $\quad y = \frac{11}{4}x - \frac{3}{32}$

c) $A\big(a \mid a^2 - 4a\big)$ $\quad y = (2a - 4)x - a^2$

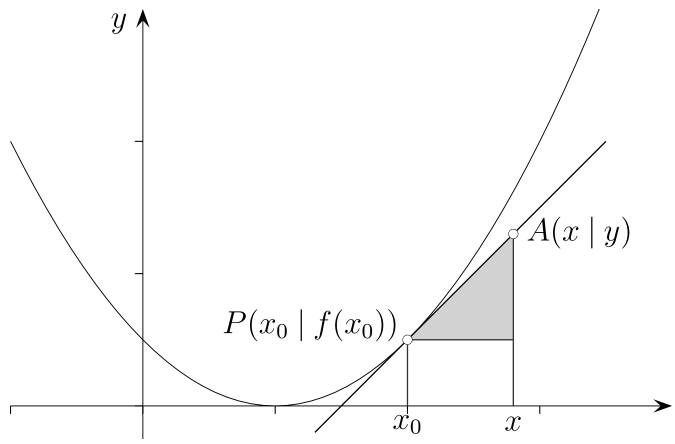
$B\big(-2a \mid 4a^2 + 8a\big)$

$y = (-4a - 4)x - 4a^2$

Tangentengleichung   Punktsteigungsform

Die Gleichung der Tangente für eine Funktion f im Punkt $P\big(x_0 \mid f(x_0)\big)$ lautet:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

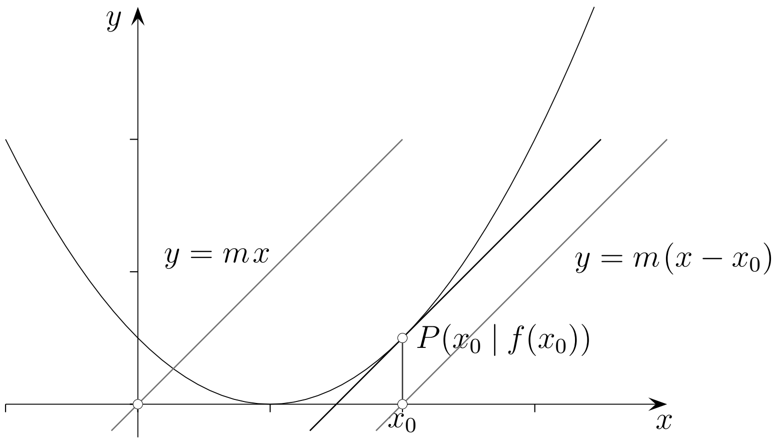


Die Tangentengleichung kann der Zeichnung unmittelbar entnommen werden.
Beachte hierzu lediglich:

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tangentengleichung   Punktsteigungsform

Die Gleichung der Tangente für eine Funktion f im Punkt $P\big(x_0 \mid f(x_0)\big)$
kann unmittelbar angegeben werden.



Die Steigung an der Stelle x_0 beträgt $m = f'(x_0)$.
Die Gleichung der Ursprungsgeraden mit dieser Steigung lautet: $y = f'(x_0)x$.
Diese Gerade nach P verschoben ergibt die Tangente mit der Gleichung:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt A?

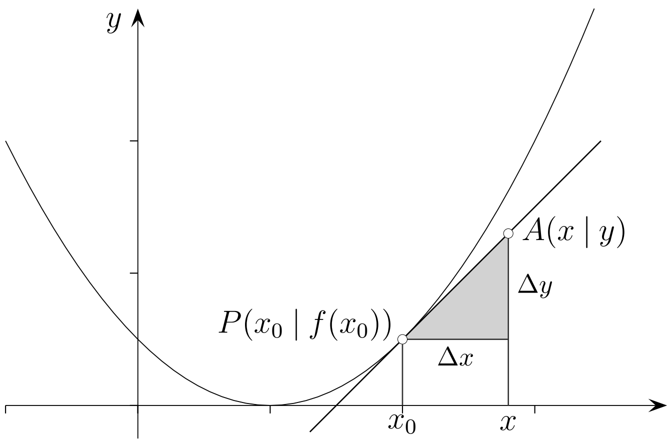
a) $f(x) = x^3 - 2x$ $\qquad A\big(3 \mid ?\big)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x$ $\qquad A\big(-1 \mid ?\big)$

c) $f(x) = x^2 - 4x$ $\qquad A\big(a \mid ?\big)$

Tangentengleichung Punktsteigungsform

Welche Beziehung besteht zwischen x und y eines Punkts $A(x \mid y)$ auf der Tangente?



$$\begin{aligned} \Delta y &= f'(x_0) \cdot \Delta x \\ &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

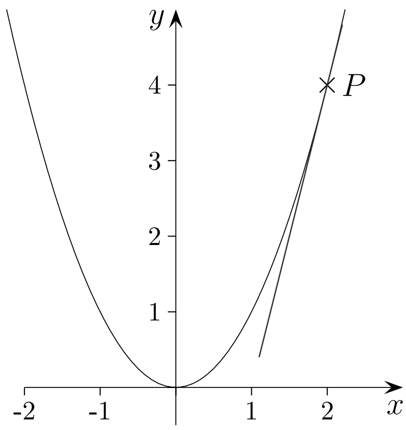
$$y = \Delta y + f(x_0)$$

Die Gleichung der Tangente für eine Funktion f im Punkt $P\big(x_0 \mid f(x_0)\big)$ lautet:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Tangentengleichung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$.
Gesucht ist die Gleichung der Tangente im Punkt $P\big(2\,|\,?\big)$.



Die Gleichung der Tangente für eine Funktion f im Punkt $P\big(x_0 \mid f(x_0)\big)$ lautet:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

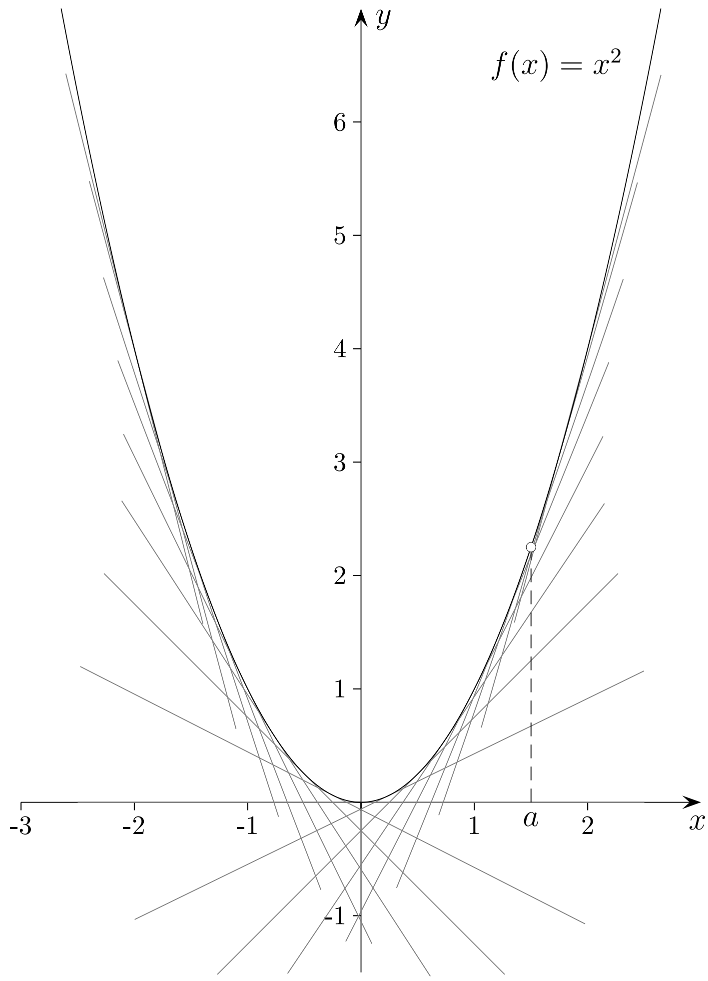
Herleitung:

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0) \cdot x + b \\ \Longrightarrow \quad f(x_0) &= f'(x_0) \cdot x_0 + b \\ \Longrightarrow \quad b &= f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \end{aligned}$$

b eingesetzt ergibt:

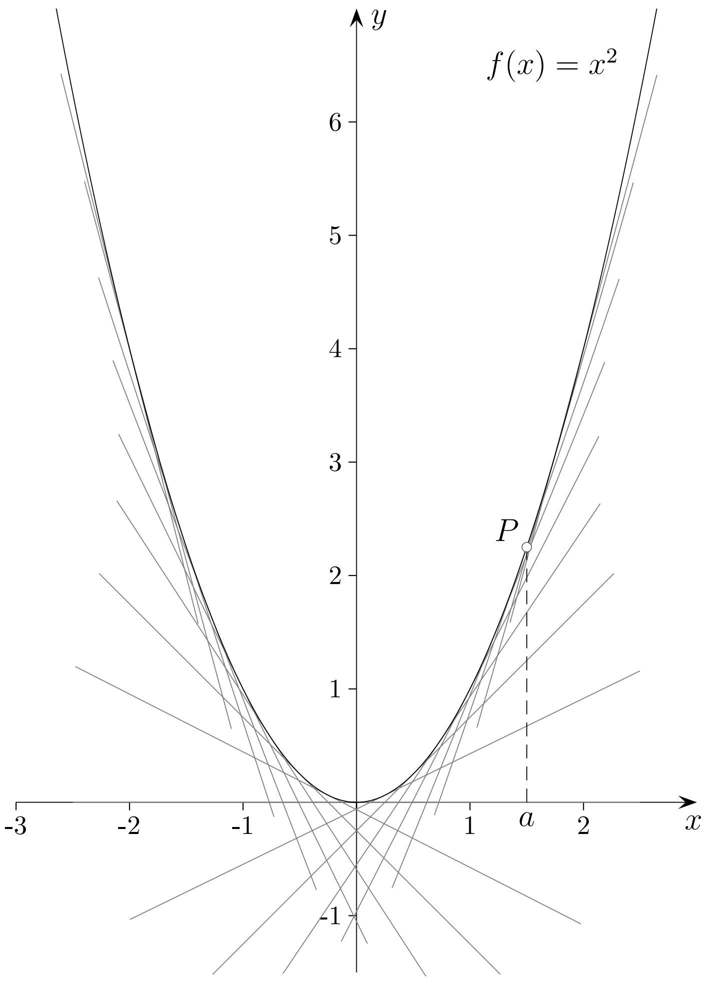
$$\begin{aligned} y &= f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \\ y &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

Tangentenschar



Wie lautet die Gleichung der Tangentenschar t_a?

Tangentenschar

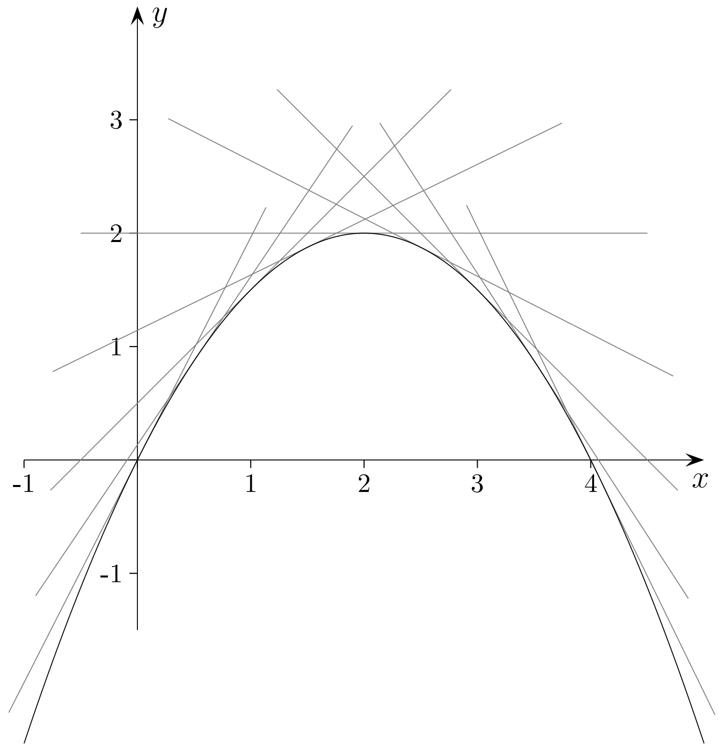


Wie lautet die Gleichung der Tangentenschar t_a?

Die Gleichung der Tangente im Punkt $P(a \mid a^2)$ lautet:

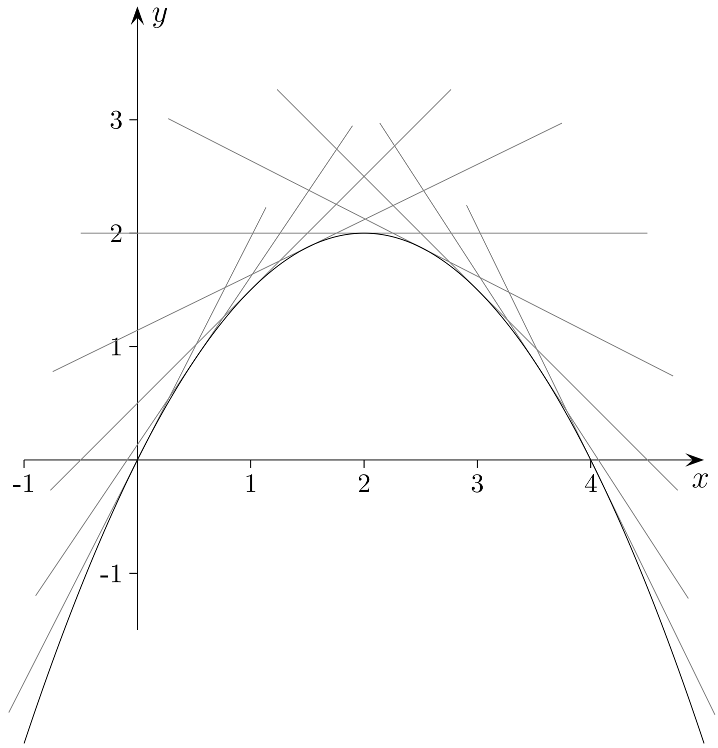
$$\begin{aligned} t_a(x) &= f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \\ &= 2a \cdot (x - a) + a^2 \\ &= 2ax - a^2 \end{aligned}$$

Tangentenschar



Wie lautet die Gleichung der Tangentenschar t_a?
Die Parabelgleichung ist nicht gegeben.

Tangentenschar



Wie lautet die Gleichung der Tangentenschar t_a?
Die Parabelgleichung ist nicht gegeben.

$f(x) = -\frac{1}{2}x(x-4)$ Beachte die Nullstellen und das Maximum, $f(x) = kx(x-4),\ f(2) = 2$.

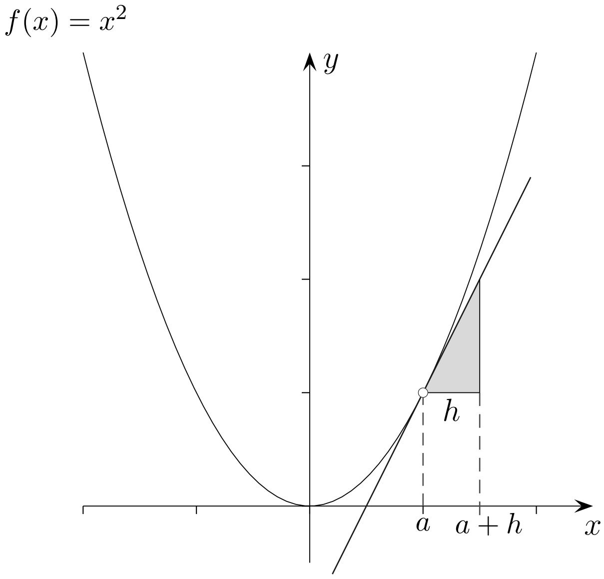
Die Gleichung der Tangente im Punkt $P(a \mid f(a))$ lautet:

$$\begin{aligned} t_a(x) &= f'(a)\cdot(x-a) + f(a) \\ &= \quad \ldots \\ &= (2-a)x + \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

Welche Tangenten verlaufen durch $A(3 \mid 2)$?

$a_1 = 2,\ a_2 = 4$

ohne Differenzialrechnung



Erläutere:

$$f(x) = f(a + \underbrace{(x-a)}_{h}) = a^2 + 2a(x-a) + (x-a)^2$$