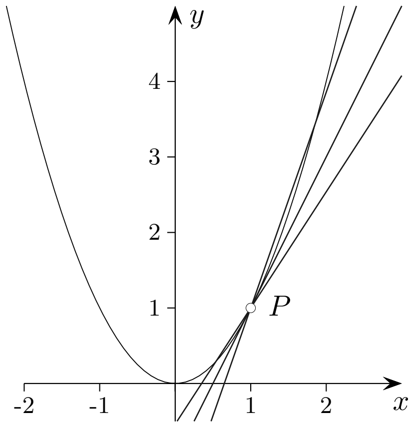
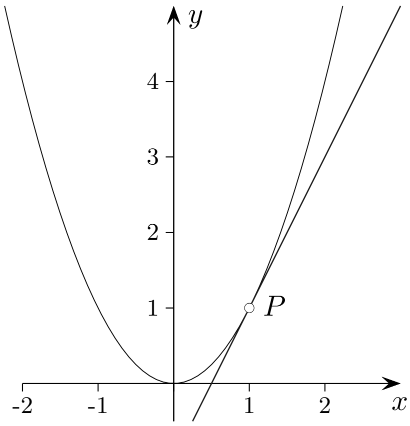
Tangente

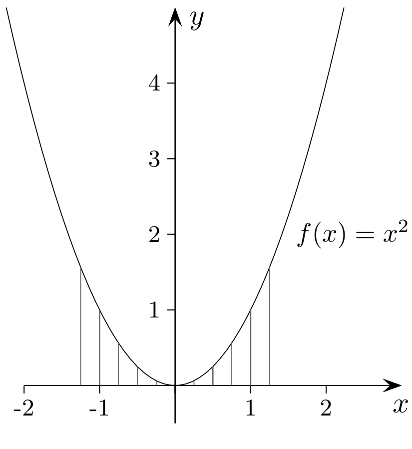
↑ Tangente

Am Anfang der von Leibniz und Newton entwickelten Analysis steht das Tangentenproblem.
Zunächst: Was ist eine Tangente?





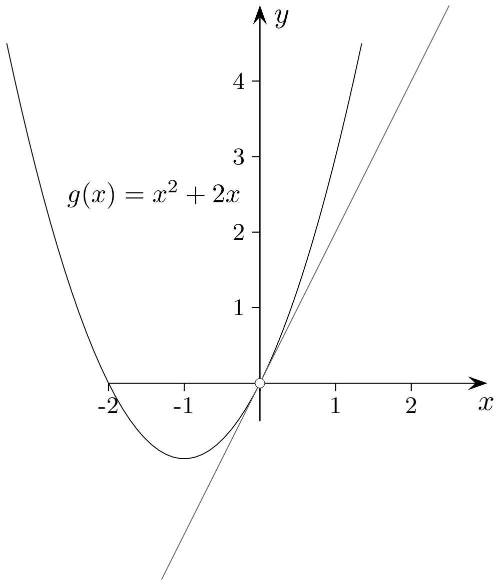
Im vorliegenden Fall $f(x) = x^2$ und der Stelle $x = 1$ ist die Antwort offensichtlich.
Es gibt augenscheinlich nur eine Gerade, die durch $P\big(1 \mid 1\big)$ verläuft und auch nur diesen Punkt mit der Parabel gemeinsam hat, die Parabel daher berührt.
An der Stelle $x = 0$ ist die x-Achse Tangente an die Parabel.
Die Parabel schmiegt sich an die Gerade. Für die x-Werte 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, … sind die Funktionswerte 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, …, d. h. sie werden quadratisch kleiner.
Für Tangenten ist diese Eigenschaft charakteristisch.

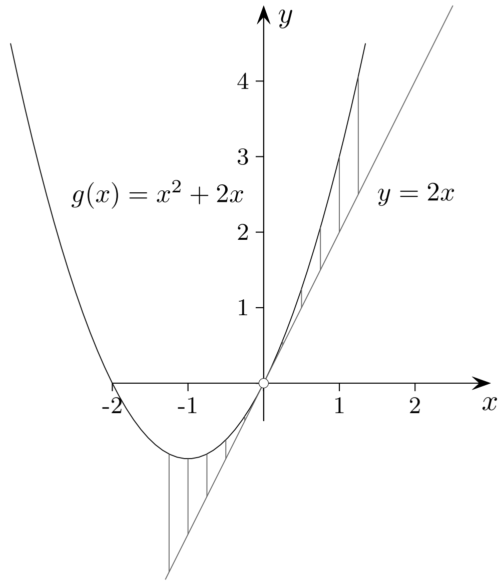


Aufg.
Betrachte die Funktion $g(x) = x^2 + 2x$ (genauer den Graphen)
und die Tangente an der Stelle $x = 0$.
Wie lautet wohl die Gleichung dieser Tangente?

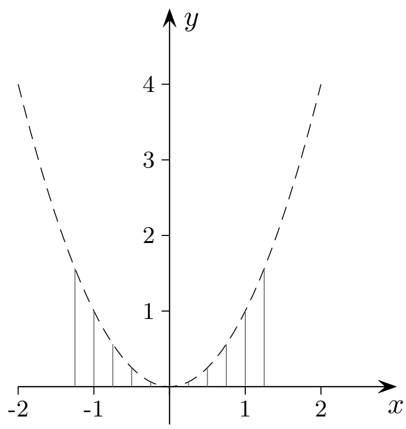
↑ Tangente von $g(x) = x^2 + 2x$ an der Stelle $x = 0$

Aufg.
Betrachte die Funktion $g(x) = x^2 + 2x$ (genauer den Graphen)
und die Tangente an der Stelle $x = 0$.
Wie lautet wohl die Gleichung dieser Tangente?



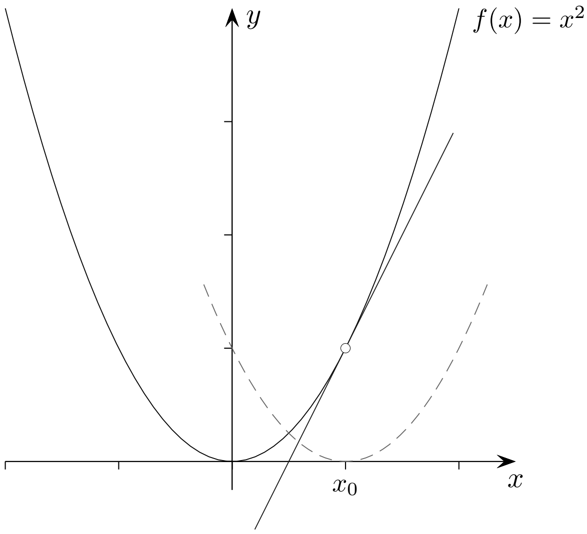


Beachte:
$x^2 + 2x - 2x = x^2$
Die Differenzfunktion ist quadratisch.
Die Tangente hat mit dem Graphen von g nur einen Punkt gemeinsam.



↑ Tangentensteigung

Erläutere

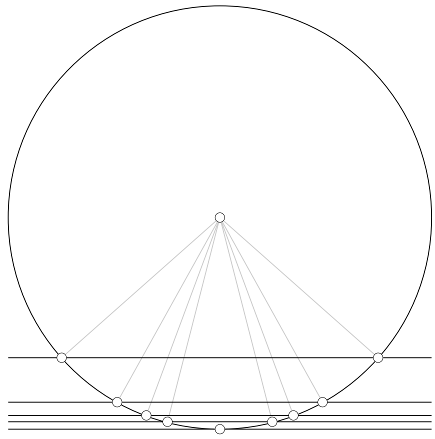


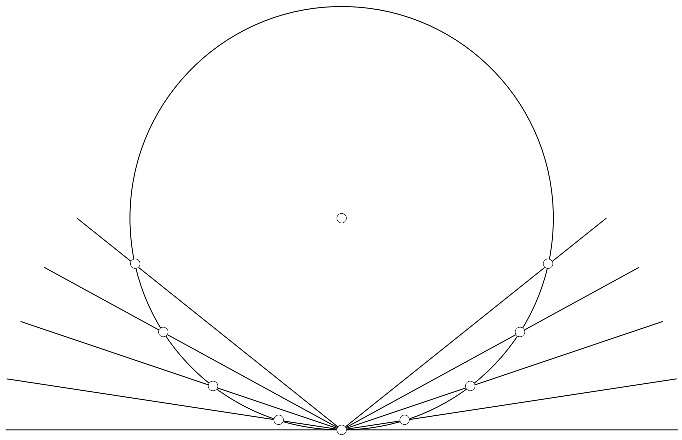
$$
\begin{aligned}
y &= m(x - x_0) + x_0^2 && \text{Gleichung einer Geraden durch } (x_0 \,|\, x_0^2) \\
x^2 - [m(x - x_0) + x_0^2] &= c(x - x_0)^2 && \text{Bedingung für eine Tangente} \\
&\ldots && \Longrightarrow c = 1 \\
-mx + mx_0 &= -2xx_0 + 2x_0^2 \\
m &= 2x_0 && \text{Tangentensteigung an der Stelle } x_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x - x_0 &= h \\
x &= x_0 + h \\
(x_0 + h)^2 - [mh + x_0^2] &= h^2 && \text{Bedingung für eine Tangente} \\
(x_0 + h)^2 - x_0^2 &= mh + h^2 \\
\frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} &= m + h \\
m &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}
\end{aligned}
$$

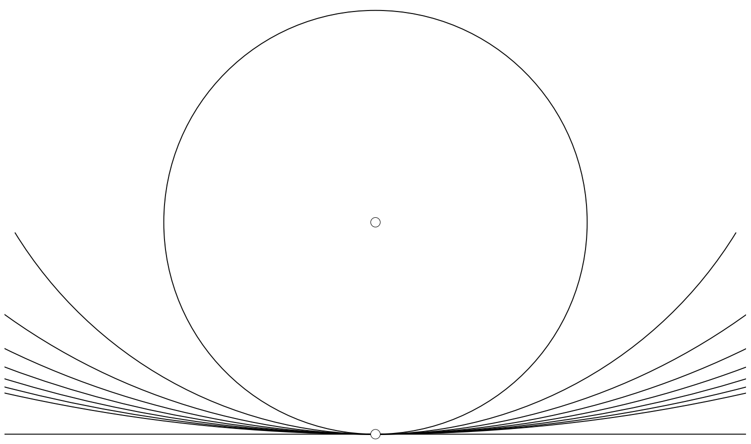
↑ Die Tangente als Grenzlage

von Sekanten

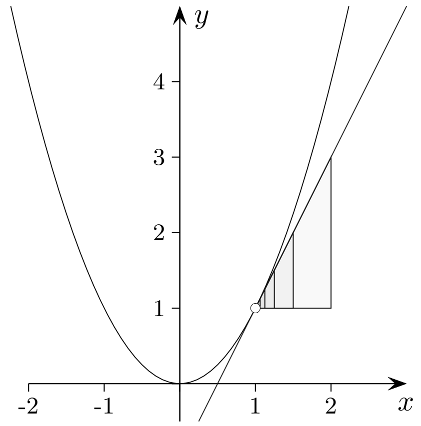


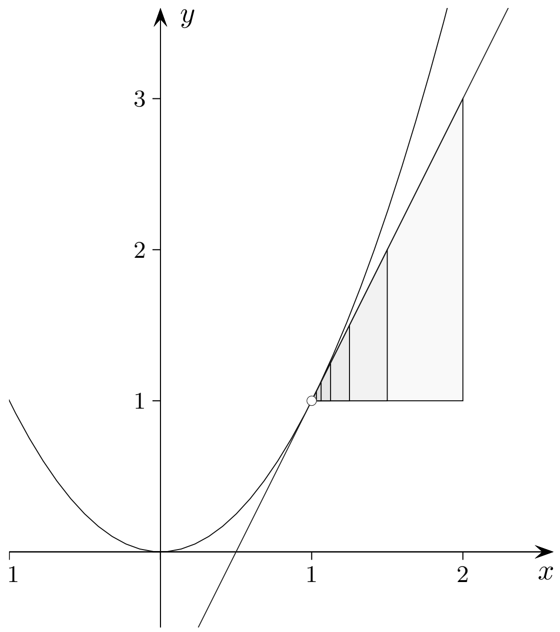


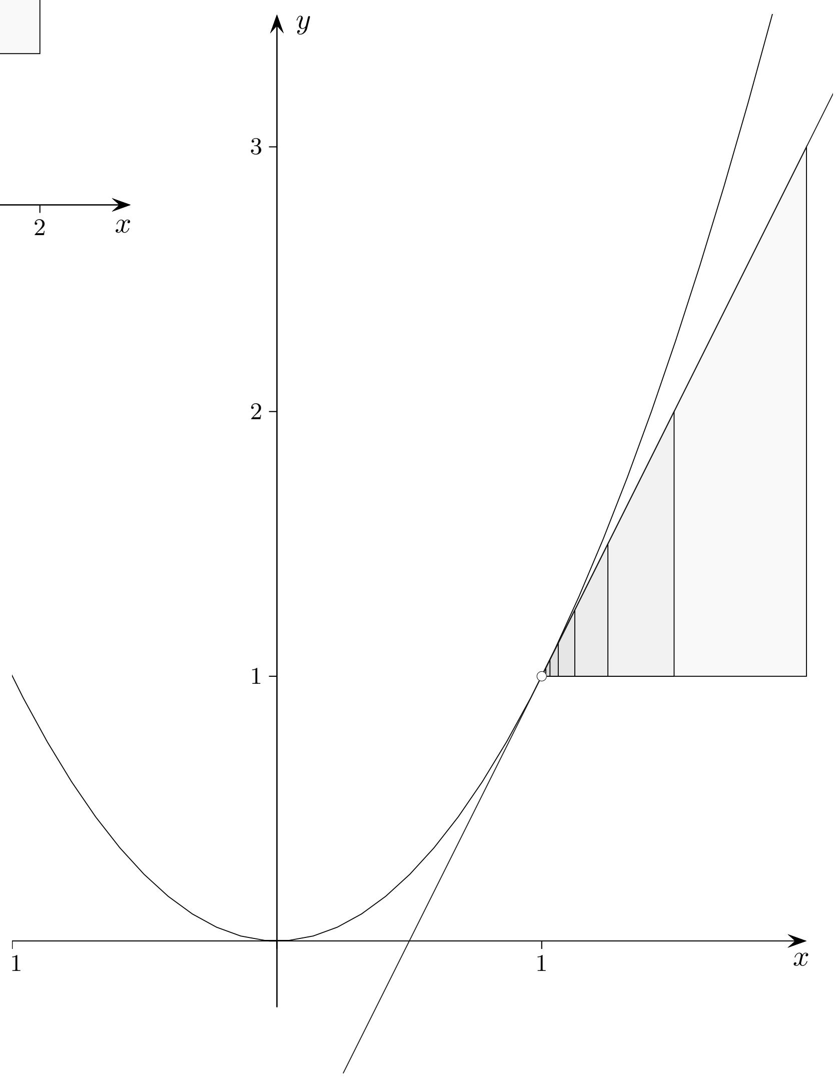
von Kreisen



↑ Funktionszoom

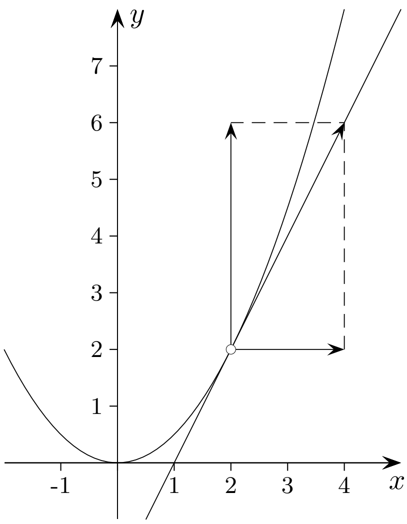




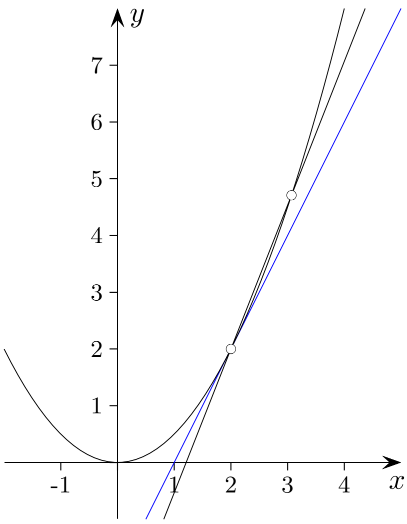


↑ Historisches vor Newton und Leibniz

Roberval 1602-1675 erkannte, dass die Definition der Tangente als Gerade, die mit dem Graphen nur einen gemeinsamen Punkt hat, z. B. für Polynome 3. Grades versagt. Er versuchte, mit einem sich bewegenden Punkt[1] und dessen Geschwindigkeit die Tangentensteigung zu ermitteln.
Newton 1643-1727 entwickelte mit dieser Idee seine Fluxionsrechnung, Fluxion = Änderungsrate.



Fermat 1607-1665 und Descartes 1596-1650 definierten Tangenten als Sekanten, deren beide Schnittpunkte mit der Kurve zusammenfallen. Barrow 1630-1677 betrachtete eine Kurve als Polygon (Streckenzug), dessen eine Seite die Tangente ergibt.



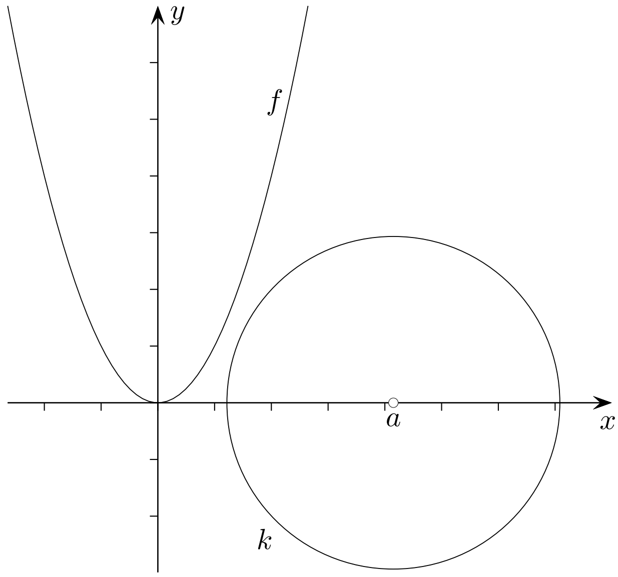
Fermat gab 1629 in seiner Schrift *De maximis et minimis* ein Verfahren zur Berechnung der Extremstellen an: $\dfrac{f(x+e)-f(x)}{e}$ vereinfachen, durch e dividieren, e enthaltende Terme streichen[2] (ergibt die Steigung an der Stelle x). Diesen Ausdruck gleich null setzen. Die Lösungen der Gleichung sind die Extremstellen (Sattelpunkte sind noch auszuschließen). Leibniz 1646-1716 wird in seiner Schrift *Nova methodus pro maximis et minimis* 1684 dx statt e verwenden. dx und dy sind Differentiale (Größen sind so klein, d. h. infinitesimal, dass der Näherungsfehler zu vernachlässigen ist), $\dfrac{dy}{dx}$ ist die Tangentensteigung.

↑

[1] Dieser Gedanke geht auf Archimedes 287-212 v. Chr. zurück.

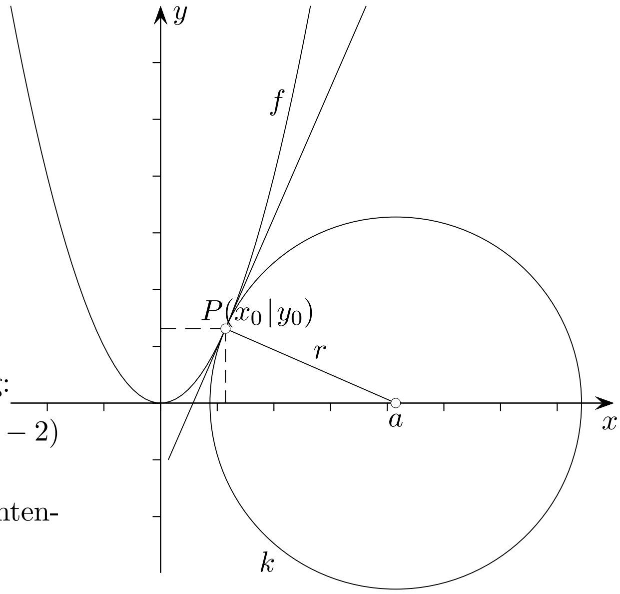
[2] In einer späteren Fassung 1643 ist vom Grenzübergang $e \to 0$ und vom Entscheid über die Art des Extremums die Rede.

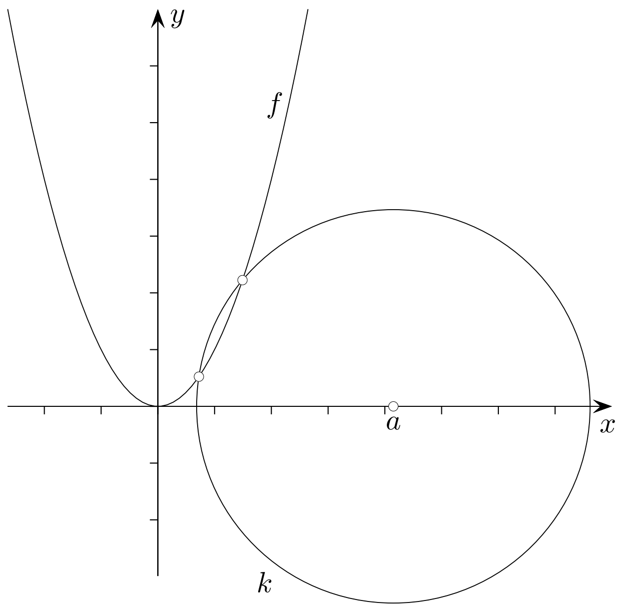
↑ Methode von Descartes



Der Kreis „berührt“ den Graphen von f.
Der Radius r ist so zu wählen, dass es nur einen Schnittpunkt gibt.
Kreisgleichung: $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
Schnittbedingung: $\underbrace{(x-a)^2 + (f(x))^2 - r^2}_{\text{Polynom vom Grad } n} = 0$

Für den dargestellten Fall hat das Polynom die doppelte Nullstelle x_0 und erlaubt die Faktorisierung:
$(x-a)^2 + (f(x))^2 - r^2 = (x-x_0)^2 \cdot (\text{Polynom vom Grad } n-2)$
Der Koeffizientenvergleich liefert ein Gleichungssystem.
Mit dem Zusammenhang von x_0 und a kann die Tangentensteigung ermittelt werden.





↑ Methode von Descartes für $f(x) = x^2$

$$
\begin{aligned}
\text{Schnittbedingung} \qquad (x-a)^2 + (x^2)^2 - r^2 &= 0 \\
x^4 + a^2 - 2ax - r^2 + x^2 &= 0 \\
\text{Faktorisierung} \qquad x^4 + x^2 - 2ax + a^2 - r^2 &= (x-x_0)^2(a_2x^2 + a_1x + a_0) \\
&= \quad \ldots \\
&= a_2x^4 + (a_1 - 2a_2x_0)x^3 + (a_0 - 2a_1x_0 + a_2x_0^2)x^2 + \\
&\qquad (a_1x_0^2 - 2a_0x_0)x + a_0x_0^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Koeffizientenvergleich} \qquad a_2 &= 1 \\
a_1 - 2a_2x_0 &= 0 \\
a_0 - 2a_1x_0 + a_2x_0^2 &= 1 \\
a_1x_0^2 - 2a_0x_0 &= -2a \\
a_0x_0^2 &= a^2 - r^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{einsetzen} \qquad a_2 &= 1 \\
\text{oben beginnen} \qquad a_1 &= 2x_0 \\
a_0 &= 1 + 3x_0^2 \\
a &= 2x_0^3 + x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad a - x_0 = 2x_0^3 \\
(r^2 &= 4x_0^6 + x_0^6)
\end{aligned}
$$

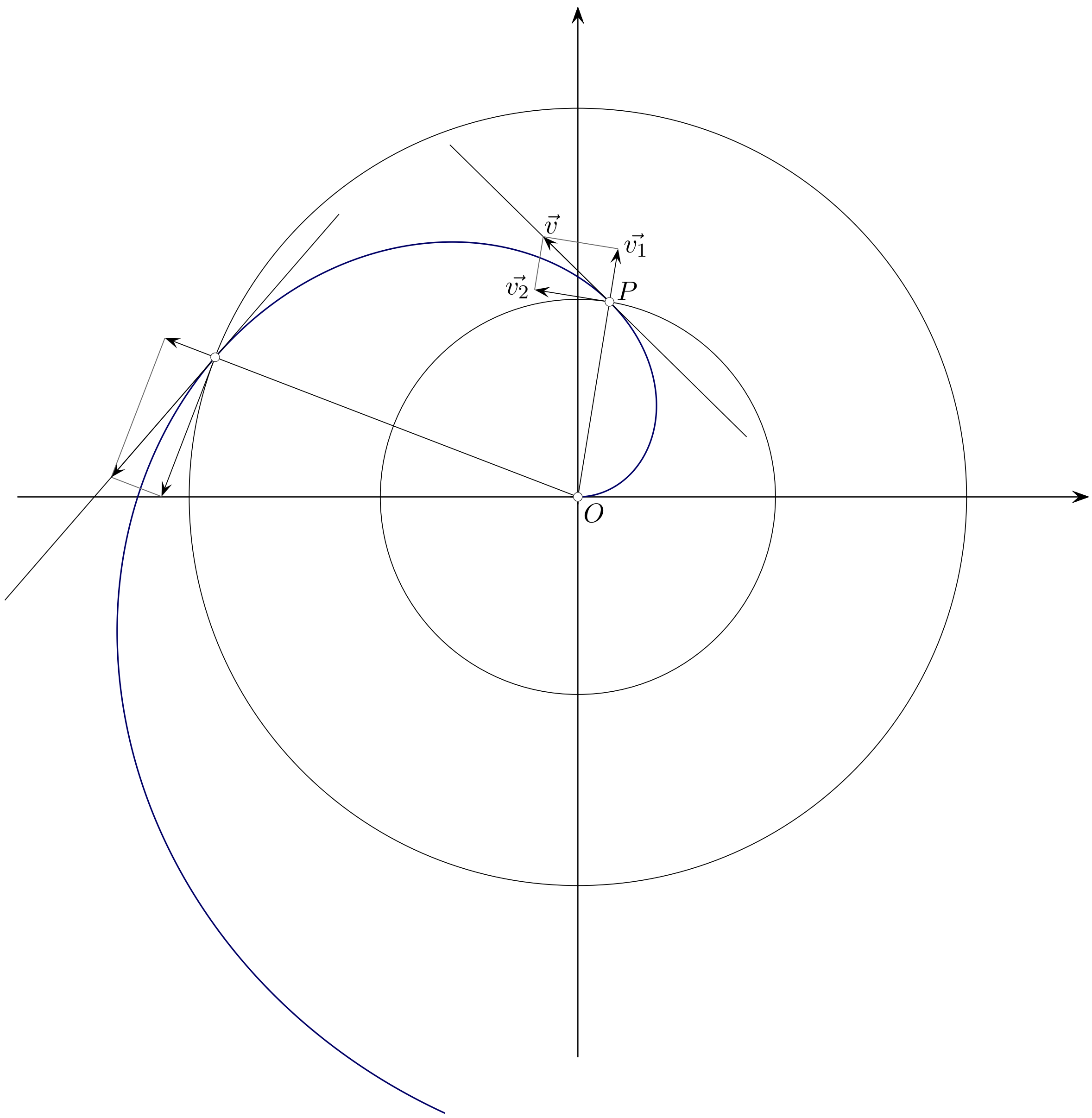
Für $x_0 \neq 0$ beträgt die Steigung der Tangente $\frac{a - x_0}{f(x_0)} = \frac{2x_0^3}{x_0^2} = 2x_0$

Für den Fall $x_0 = 0$ verschiebt man den Graphen der Funktion f in y-Richtung, z. B. $f(x) = x^2 + 1$. Ein erneuter Koeffizientenvergleich führt zu $a = 2x_0^3 + 3x_0$ und weiter zu

$$\frac{a - x_0}{f(x_0)} = \frac{2x_0^3 + 2x_0}{x_0^2 + 1} = \frac{2x_0(x_0^2 + 1)}{x_0^2 + 1} = 2x_0$$

Das Verfahren führt auch mit einer durch $P(x_0|y_0)$ verlaufenden Geraden $y = m(x - x_0) + x_0^2$ statt eines Kreises zum Ziel. Die Faktorisierung lautet $x^2 - [m(x - x_0) + x_0^2] = (x - x_0)^2c$. Mit dem Koeffizientenvergleich erhalten wir $c = 1$ und $m = 2x_0$.

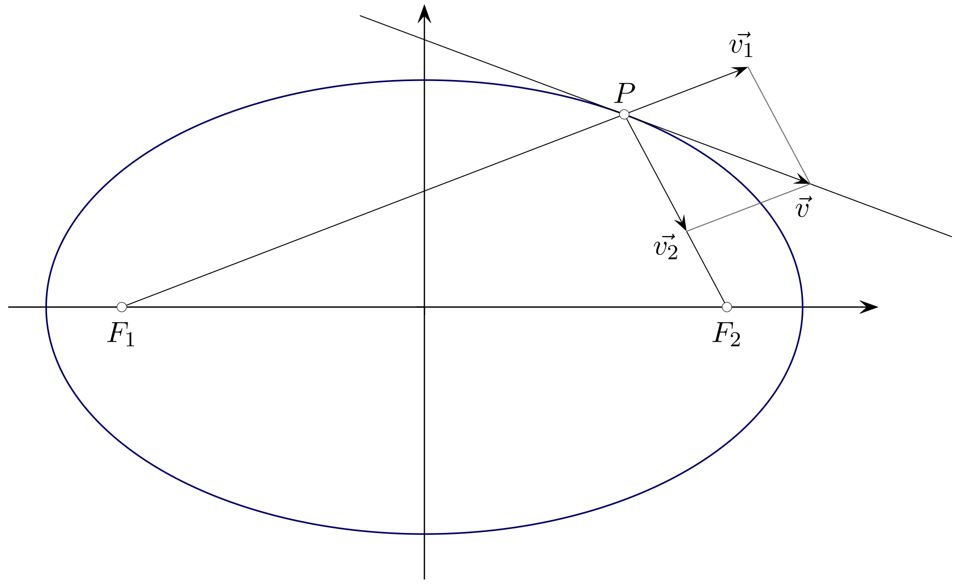
↑ Methode von Archimedes/Roberval



Die Spirale entsteht durch einen bewegten Punkt P.
Seine Bewegung setzt sich zusammen aus einer Translation in Richtung OP, beschrieben durch den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v_1}$, und einer Rotation um O im Gegenuhrzeigersinn, beschrieben durch den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v_2}$. $\vec{v_2}$ steht senkrecht auf OP.

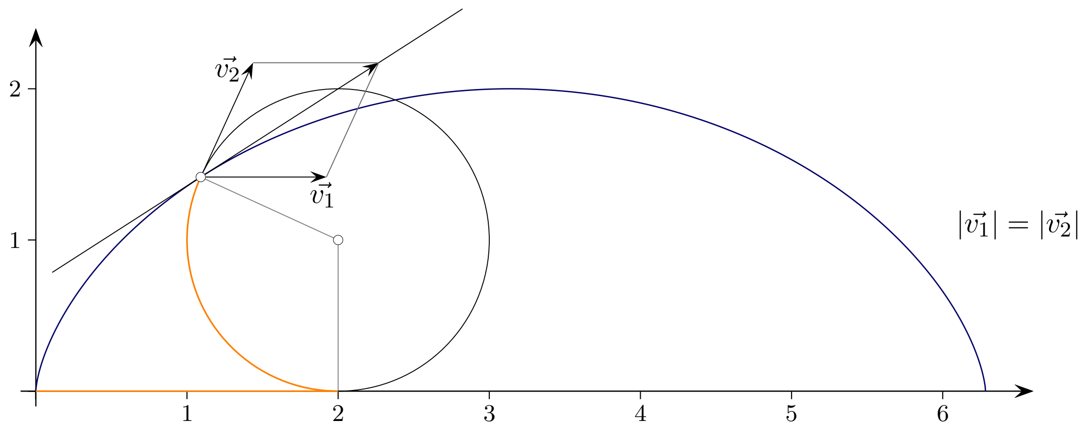
Roberval definiert als Tangente an die Kurve jene Gerade, die durch die Richtung der Momentangeschwindigkeit festgelegt wird.

↑ Methode von Roberval

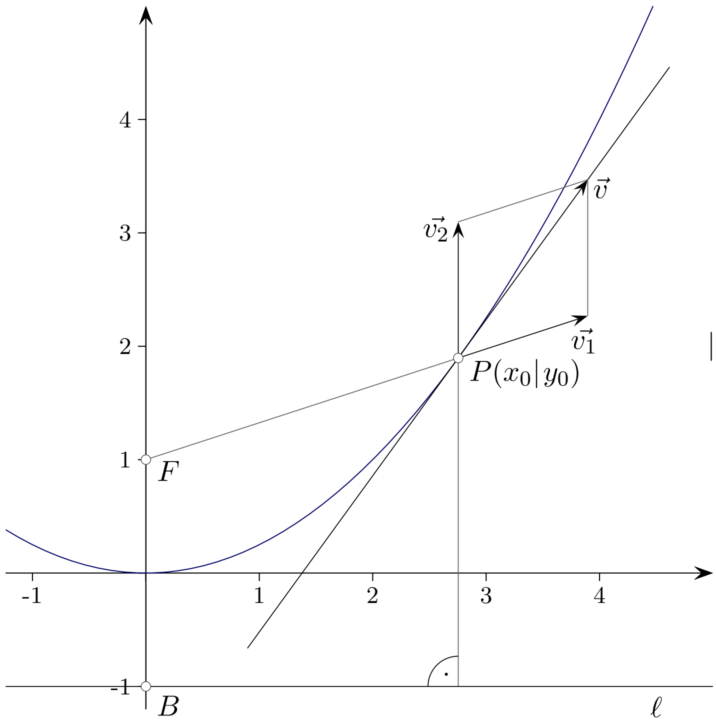


Die Ellipse entsteht durch einen bewegten Punkt P (Gärtnerkonstruktion).
Seine Bewegung setzt sich zusammen aus einer Translation in Richtung F_1P, beschrieben durch den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v_1}$, und aus einer Translation in Richtung PF_2, beschrieben durch den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v_2}$.
Die Gesamtlänge der Abstände zu den Brennpunkten bleibt unverändert.
Durch eine Bewegung von P nach rechts vergrößert sich $\overline{F_1P}$ im gleichen Maße wie sich $\overline{PF_1}$ verkleinert. Nach links ist es umgekehrt. $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ haben daher dieselbe Länge.
Die Richtung von $\vec{v}$ erhalten wir mit $|\overrightarrow{PF_2}|\overrightarrow{F_1P} + |\overrightarrow{F_1P}|\overrightarrow{PF_2}$.

Roberval gelangen auf ganz ähnliche Weise weitere Tangentenkonstruktionen.
Ein Punkt auf der Parabel hat den gleichen Abstand zum Brennpunkt und zur Leitlinie.
Eine Zykloide (Rollkurve), wird durch einen festen Punkt P auf dem Kreis beschrieben, wenn der Kreis auf einer Geraden abrollt. Die Bewegung von P kann in eine Translation entlang der Geraden und eine Rotation um den Mittelpunkt des Kreises zerlegt werden.



↑ Roberval Tangente an die Parabel



$|\vec{v_1}| = |\vec{v_2}|$

Die Bahn eines Punktes P ist eine Parabel (hier $y = \frac{1}{4}x^2$), wenn P zu jedem Zeitpunkt von einer vorgegebenen Linie ℓ (der Leitlinie) denselben Abstand wie zu einem fixen Punkt F (dem Brennpunkt) hat. Die Bewegung des Punktes P setzt sich aus den betragsmäßig gleichen Komponenten $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ zusammen.

$F(0|a)$, ℓ verläuft durch $B(0|-a)$
Zusammenhang

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_0^2 + (y_0 - a)^2} &= y_0 + a \\
x_0^2 + (y_0 - a)^2 &= (y_0 + a)^2 \\
&\ldots \\
y_0 &= \frac{1}{4a}x_0^2
\end{aligned}$$

12. Jg

Die Längen von $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ sind nicht relevant,
sie müssen nur gleich sein.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 - a \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 + a \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \frac{1}{2a}x_0^2 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2a}x_0 \end{pmatrix}$$

Das Tangentensteigung ist daraus ablesbar. $a = 1/4$ ergibt $y = x^2$ und $m_{\text{Tangente}} = 2x$