pq-Formel im 11. Jg.

Die Lösungen der quadr. Gleichung $x^2 - 6x + 5 = 0$ sind die Nullstellen der Parabel $y = x^2 - 6x + 5$.

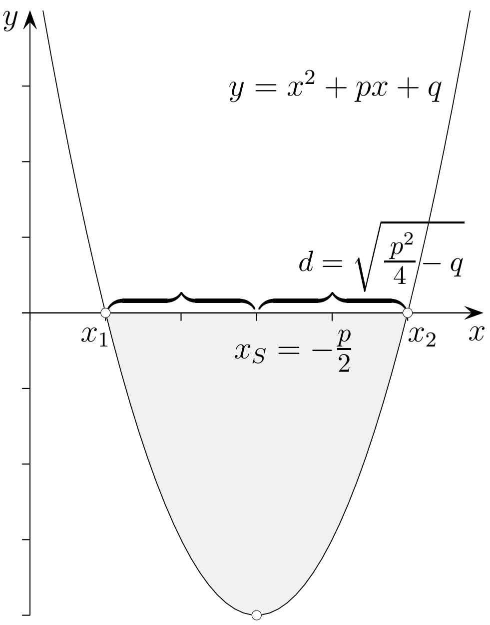
Die Nullstellen ergeben sich, indem ein Wert d zur x-Koordinate des Scheitels x_S addiert bzw. von der x-Koordinate des Scheitels subtrahiert wird. Differenzialrechnung: $y' = 2x - 6$, $0 = 2x_S - 6$, $x_S = 3$.

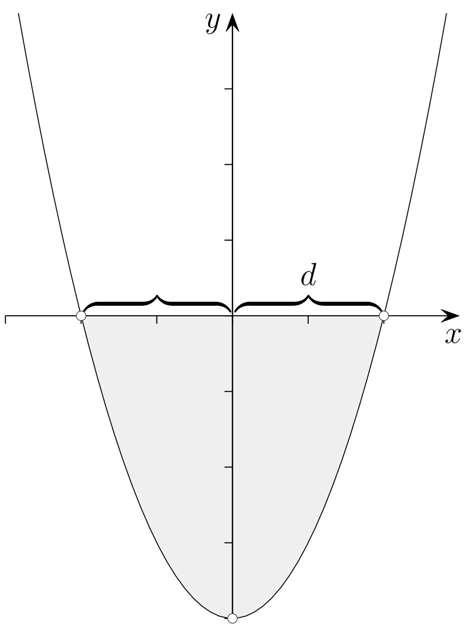
Für die Berechnung von d wird die Parabel um 3 Einheiten nach links verschoben. Für die Nullstellen $\pm d$ der verschobenen Parabel ist lediglich eine Gleichung der Art $x^2 = a$ (reinquadratisch) zu lösen.

Verschobene Parabel: $y = (x+3)^2 - 6(x+3) + 5 = x^2 - 4$

$x^2 - 4 = 0$, pos. Lösung $d = 2$, $x_{1/2} = 3 \pm 2$,

$x_1 = 1$, $x_2 = 5$





$$\begin{aligned}
y &= x^2 + px + q \\
y' &= 2x + p \quad \Longrightarrow \quad x_S = -\frac{p}{2} \\
y &= (x + x_S)^2 + p(x + x_S) + q && \text{Verschiebung} \\
&= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(x - \frac{p}{2}\right) + q \\
&\dots \\
&= x^2 - \frac{p^2}{4} + q \\
x^2 &= \frac{p^2}{4} - q && \text{Nullstellen der verschobenen Parabel} \\
x_{1/2} &= \pm \underbrace{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}_{d}, \quad \text{falls } \frac{p^2}{4} - q \geq 0
\end{aligned}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm d$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

Vorzeichen umkehren

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

durch 2 teilen und
Vorzeichen umkehren

$$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7}$$

quadrieren (negatives Vorzeichen fällt weg)

Statt $\frac{6}{2}$ solltest du 3 schreiben:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -3 \pm \sqrt{9+7} \\ &= -3 \pm 4 \\ x_1 &= 1,\ \ x_2 = -7 \end{aligned}$$

Einfache Probe nach Vieta:
Es ist $x_1 \cdot x_2 = -7$ und $x_1 + x_2 = -6$, stets gilt:

$$x_1 \cdot x_2 = q \ \text{ und } \ x_1 + x_2 = -p$$

Zur Begründung rechnen wir aus und vergleichen:

$$\begin{aligned} x^2 + p\,x + q &= 0 \\ (x - x_1)(x - x_2) &= 0 \\ &\cdots \\ x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Quadratische Gleichung   Typen

Typ 1

$x^2 - 3 = 0$ Zwischenschritt(e): Gleichung nach x^2 umstellen.

$x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

Typ 2

$x(x-3) = 0$ Lösungen sind ohne Rechnung erkennbar.

Die Gleichung könnte auch in der Form $x^2 - 3x = 0$ vorliegen.

$x_1 = 0;\ x_2 = 3$

Typ 3

$x(x-2) = 3$ Nur hier ist die *pq*-Formel erforderlich.

Zwischenschritt: $x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 = -1;\ x_2 = 3$

Typ 4

$(x-5)^2 = 9$ Ratsam ist, die Klammern nicht aufzulösen,

die *pq*-Formel ist nicht erforderlich.

Zwischenschritt: $x - 5 = \pm 3$

$x_1 = 8;\ x_2 = 2$

Quadratische Gleichung Übung

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$

2. $x^2 + 3x - 28 = 0$

3. $x^2 + 6x = 0$

4. $3x^2 + 4x + 1 = 0$

5. $6x^2 - x = 1$

6. $x^2 - x - 6 = 0$

7. $x^2 + 9x + 20 = 0$

8. $x^2 - 5x = 0$

9. $3x^2 + 2x = 0$

10. $(x - 1)^2 = 16$

11. $(x + 4)^2 = 2$

12. $t^2x + tx^2 = 0$ ab hier $t > 0$

13. $x^2 - 2tx - 3t^2 = 0$

14. $2x^2 - 3tx - 2t^2 = 0$

Quadratische Gleichung Übung

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$
2. $x^2 + 3x - 28 = 0$
3. $x^2 + 6x = 0$
4. $3x^2 + 4x + 1 = 0$
5. $6x^2 - x = 1$
6. $x^2 - x - 6 = 0$
7. $x^2 + 9x + 20 = 0$
8. $x^2 - 5x = 0$
9. $3x^2 + 2x = 0$
10. $(x-1)^2 = 16$
11. $(x+4)^2 = 2$
12. $t^2x + tx^2 = 0$ ab hier $t > 0$
13. $x^2 - 2tx - 3t^2 = 0$
14. $2x^2 - 3tx - 2t^2 = 0$

Lösungen

1. $6;\ 2$
2. $4;\ -7$
3. $0;\ -6$
4. $-1;\ -\frac{1}{3}$
5. $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}$
6. $3;\ -2$
7. $-4;\ -5$
8. $0;\ 5$
9. $0;\ -\frac{2}{3}$
10. $5;\ -3$
11. $-4 \pm \sqrt{2}$
12. $0;\ -t$
13. $-t;\ 3t$
14. $2t;\ -\frac{t}{2}$

Quadratische Gleichung mit Parameter

$$x^2 + 2ax + a^2 + a \;=\; 0, \quad a \in \mathbb{Z}$$

Löse die Gleichung für $a \in \{-4, -1, 1\}$ und allgemein.
Wie hängt die Anzahl der Lösungen von a ab?

Quadratische Gleichung mit Parameter

$$x^2 + 2ax + a^2 + a = 0, \quad a \in \mathbb{Z}$$

Löse die Gleichung für $a \in \{-4, -1, 1\}$ und allgemein.
Wie hängt die Anzahl der Lösungen von a ab?

$a = -4$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$x_1 = 2, \; x_2 = 6$$

$a = -1$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x_1 = 0, \; x_2 = 2$$

$a = 1$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$L = \{ \; \}$$

allgemein

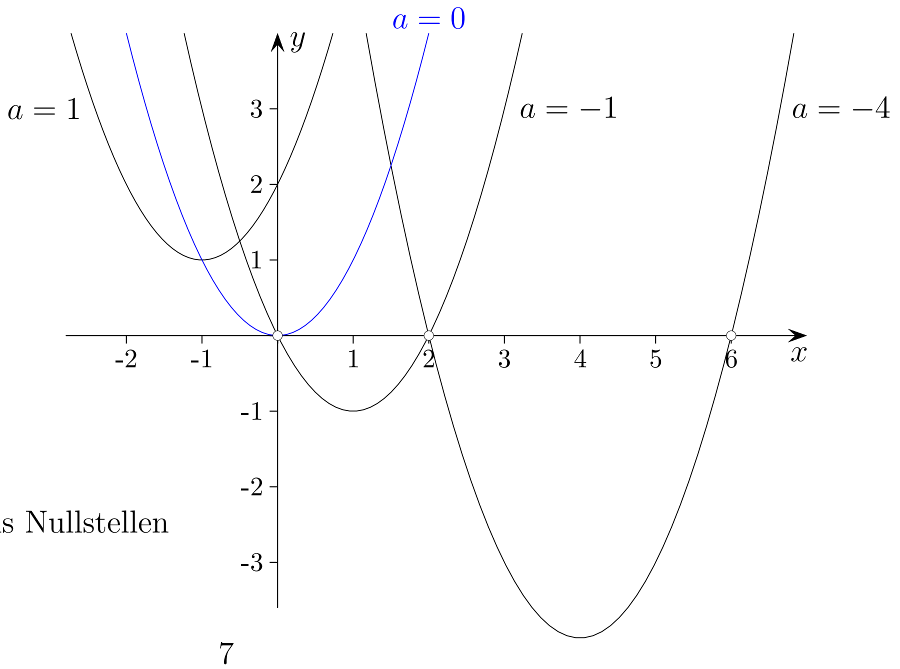
$$x^2 + 2ax + a^2 + a = 0$$

$$x_{1/2} = -a \pm \sqrt{-a}$$

$a = 0$, eine Lösung

$a < 0$, zwei Lösungen, $\pm$ Wurzel aus einer pos. Zahl $-a$ (a neg.)

$a > 0$, keine Lösung, Wurzel aus einer neg. Zahl existiert nicht



Veranschaulichung der Lösungen als Nullstellen

Quadratische Gleichung
Startseite