Kostenfunktionen   Fortsetzung

1. Ein Unternehmen stellt ein Produkt her. Die Gesamtkostenfunktion lautet:
   $K(x) \;=\; 9800 + 1{,}75x + 0{,}005x^2$,
   der Stückpreis beträgt 18 Geldeinheiten.

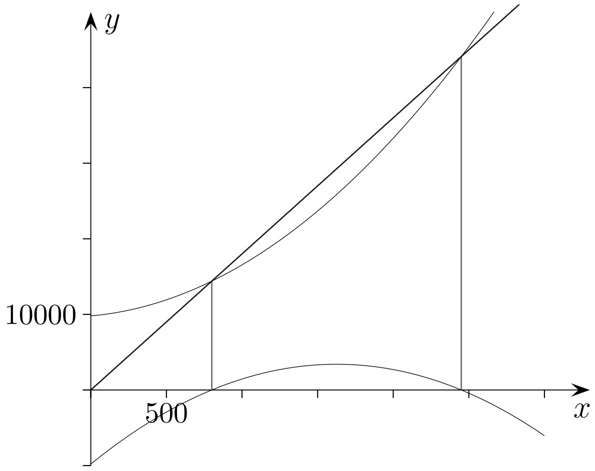
   Um x Einheiten des Produkts zu produzieren, entstehen Kosten von $K(x)$ Geldeinheiten.

   a) Errechne die Gewinnzone.

   b) Wie viele Einheiten müssen produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?
   Wie hoch ist der Gewinn dann?

   c) Bei welchem Output sind die Stückkosten minimal und wie hoch sind sie dann?

   Lösung:

   a) Die Gewinnzone lautet: [800, 2450],
   hierzu ist eine quadratische Gleichung zu lösen:

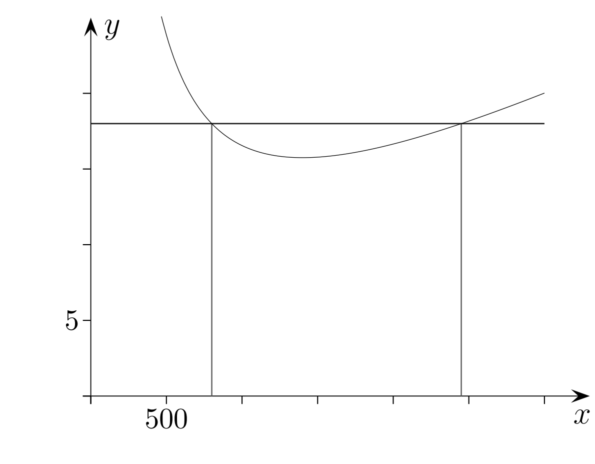
$$\begin{aligned} K(x) &= U(x) \\ 9800 + 1{,}75x + 0{,}005x^2 &= 18 \cdot x \\ x^2 - 3250x + 1960000 &= 0 \end{aligned}$$

   b) Der maximale Gewinn wird bei einem Output von 1625 Einheiten erwirtschaftet, er beträgt dann 3403,125 Geldeinheiten,

   $G(x) = U(x) - K(x)$

   Notwendige Bedingung: $G'(x) = 0$

   $G(1625) = 3403{,}125$

   c) Das Minimum der Stückkostenfunktion ist an der Stelle $x = 1400$, die Stückkosten betragen dann 15,75 Geldeinheiten.

   $D(x) = \dfrac{K(x)}{x}$

   Notwendige Bedingung: $D'(x) = 0$

   Zwischenlösung: $0{,}005x^2 - 9800 = 0$

2. Text wie oben.
   $K(x) = 450 + 0{,}75x + 0{,}005x^2$
   Stückpreis: 4 Geldeinheiten

2. Ein Unternehmen stellt ein Produkt her. Die Gesamtkostenfunktion lautet:
   $K(x) = 450 + 0{,}75x + 0{,}005x^2$,
   der Stückpreis beträgt 4 Geldeinheiten.

   Um x Einheiten des Produkts zu produzieren, entstehen Kosten von $K(x)$ Geldeinheiten.

   a) Errechne die Gewinnzone.

   b) Wie viele Einheiten müssen produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?
   Wie hoch ist der Gewinn dann?

   c) Bei welchem Output sind die Stückkosten minimal und wie hoch sind sie dann?

Lösung:

a) Die Gewinnzone lautet: $[200,\ 450]$

b) Der maximale Gewinn wird bei einem Output von 325 Einheiten erwirtschaftet,
er beträgt dann 78,125 Geldeinheiten.

c) Das Minimum der Stückkostenfunktion ist an der Stelle $x = 300$,
die Stückkosten betragen dann 3,75 Geldeinheiten.

3. Ein Unternehmen stellt ein Produkt her. Die Gesamtkostenfunktion lautet:
   $K(x) \ = \ \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + 12,$
   der Stückpreis beträgt 5 Geldeinheiten.
   Um x Einheiten (in Tausend) des Produkts zu produzieren, entstehen Kosten von $K(x)$ Geldeinheiten.

   a) Errechne die Gewinnzone.

   b) Wie viele Einheiten müssen produziert werden, damit der Gewinn maximal wird? Wie hoch ist der Gewinn dann?

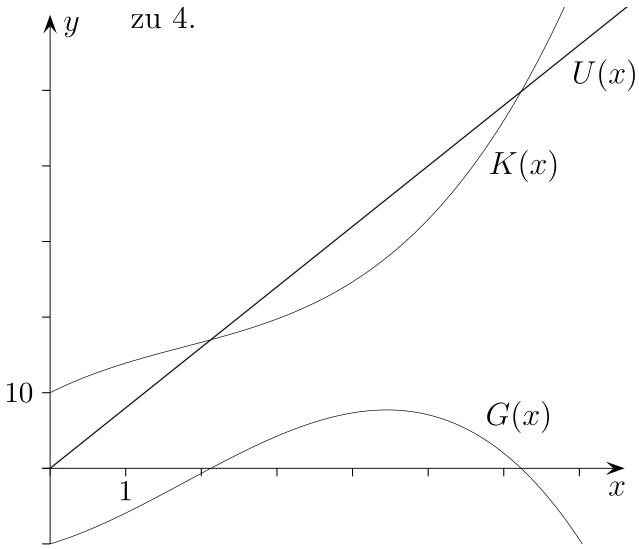
   c) Bei welchem Output sind die Stückkosten minimal und wie hoch sind sie dann?

4. Text wie in der vorigen Aufgabe,
   Gesamtkostenfunktion: $K(x) \ = \ \frac{1}{4}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 5x + 10$
   Stückpreis: 8 Geldeinheiten

Lösungen:

3. a) Gewinnzone [4; 10,325]
   b) $G(7{,}651) = 12{,}172$
   c) $D(6{,}984) = 3{,}339$

4. a) Gewinnzone [2,126; 6,229]
   b) $G(4{,}454) = 7{,}723$
   c) $D(3{,}949) = 6{,}166$



Kostenfunktionen ermitteln

5. Gib eine Kostenfunktion $K(x)$ an, die die Bedingungen erfüllt. Der Graph verläuft durch

   a) $A(0 \mid 10)$, $B(2 \mid 16{,}4)$, $C(4 \mid 22{,}8)$, $D(6 \mid 41{,}2)$

   b) $A(0 \mid 20)$, $B(1 \mid 24{,}3)$, $C(3 \mid 29{,}3)$, $D(5 \mid 37{,}5)$

   c) $A(2 \mid 13{,}2)$, $B(6 \mid 38)$ und durch $C(0 \mid 5)$ mit der Steigung 5,8

   d) $A(0 \mid 6)$, $B(2 \mid 17)$, $C(7 \mid 62)$, an der Stelle $x = \dfrac{7}{3}$ liegt ein Wendepunkt.

Kostenfunktionen ermitteln, Lösungen

5. Gib eine Kostenfunktion $K(x)$ an, die die Bedingungen erfüllt. Der Graph verläuft durch

   a) $A(0\,|\,10),\ B(2\,|\,16{,}4),\ C(4\,|\,22{,}8),\ D(6\,|\,41{,}2)$

   Der Ansatz lautet: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\begin{aligned} d &= 10 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 16{,}4 \\ 64a + 16b + 4c + d &= 22{,}8 \\ 216a + 36b + 6c + d &= 41{,}2 \end{aligned}$$

   Die Kostenfunktion lautet: $K(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{26}{5}x + 10$

   b) $A(0\,|\,20),\ B(1\,|\,24{,}3),\ C(3\,|\,29{,}3),\ D(5\,|\,37{,}5)$

   Die Kostenfunktion lautet: $K(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{7}{5}x^2 + \frac{11}{2}x + 20$

   c) $A(2\,|\,13{,}2),\ B(6\,|\,38)$ und durch $C(0\,|\,5)$ mit der Steigung 5,8

$$\begin{aligned} d &= 5 \\ c &= 5{,}8 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 13{,}2 \\ 64a + 16b + 4c + d &= 22{,}8 \\ 216a + 36b + 6c + d &= 38 \end{aligned}$$

   Die Kostenfunktion lautet: $K(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{29}{5}x + 5$

   d) $A(0\,|\,6),\ B(2\,|\,17),\ C(7\,|\,62)$, an der Stelle $x = \frac{7}{3}$ liegt ein Wendepunkt.

$$\begin{aligned} d &= 6 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 17 \\ 343a + 49b + 7c + d &= 62 \\ 14a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

   Die Kostenfunktion lautet: $K(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 8x + 6$

6. Gegeben ist die Gesamtkostenfunktion: $K(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

   Der Stückpreis beträgt 1 Geldeinheit.

   Ermittle $K(2)$ und mit diesem Wissen die Gewinnzone.

7. Gegeben ist die Gesamtkostenfunktion: $K(x) = \frac{1}{9}x^3 - 5x^2 + 125x + 10125$

   Zeige, dass die Stückkosten für $x = 45$ minimal sind.
   Gib den Mindestpreis für eine verlustfreie Produktion an.

6. Gegeben ist die Gesamtkostenfunktion: $K(x) = \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{2}$

   Der Stückpreis beträgt 1 Geldeinheit.

   Ermittle $K(2)$ und mit diesem Wissen die Gewinnzone.

   $K(2) = 2, \quad \text{d.h. } G(2) = 0$

   $(x^3 - 6x^2 - 4x + 24) : (x - 2) = x^2 - 4x - 12$

   Gewinnzone $[2, 6]$

7. Gegeben ist die Gesamtkostenfunktion: $K(x) = \dfrac{1}{9}x^3 - 5x^2 + 125x + 10125$

   Zeige, dass die Stückkosten für $x = 45$ minimal sind.
   Gib den Mindestpreis für eine verlustfreie Produktion an.

   $D'(x) = \frac{2}{9}x - 5 - \frac{10125}{x^2}$

   $D(45) = 350$