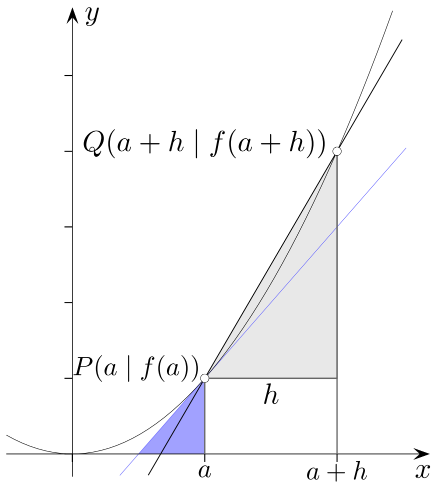
Differentialrechnung Anfänge

Leibniz 1646-1716, Newton 1643-1727

Wir ermitteln die Tangentensteigungen für verschiedene Funktionen f im Punkt $P(\,a \mid f(a))$.



$f(x) = x^2$	$2a$	
$f(x) = x^2 + 3$	$2a$	*Eine Zahl als Summand fällt weg.*
$f(x) = 4x^2$	$8a$	*Eine Zahl als Faktor bleibt erhalten (Faktorregel).*
$f(x) = x^2 + 4x$	$2a + 4$	
$f(x) = x^3$	$3a^2$	
$f(x) = x^3 + x^2$	$3a^2 + 2a$	*Summanden werden einzeln betrachtet.*
$f(x) = x^n$	na^{n-1}	

Betrachte $f(x) = x^2$. Statt $m_{\text{Tangente}} = 2a$ schreiben wir $f'(x) = 2x$ oder $(x^2)' = 2x$.
$f'(x) = 2x$ heißt 1. Ableitung von $f(x) = x^2$.
Die Funktion $f(x) = x^2$ wurde abgeleitet oder differenziert.
$f'(4) = 8$ bedeutet, dass die Tangentensteigung an der Stelle $x = 4$ (also im Punkt $P(\,4 \mid 16\,)$) 8 beträgt.

Das allgemeine Vorgehen (h-Methode), um die 1. Ableitung an der Stelle a zu ermitteln, lautet:

$$m_{\text{Tangente}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Der auf der rechten Seite stehende Quotient heisst Differenzenquotient.
Nun sind wir in der Lage, Extrema (Minimum und Maximum) zu berechnen, genauer, die Punkte des Graphen mit waagerechter Tangente, für die also $f'(x) = 0$ gilt.

Auch wenn Q sehr nahe bei P liegt, bleibt ein blau gefärbtes Steigungsdreieck sichtbar.

In welchen Punkten besitzt die Funktion waagerechte Tangenten?

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 7$

Differentialrechnung   Anfänge

In welchen Punkten besitzt die Funktion waagerechte Tangenten?

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 7$

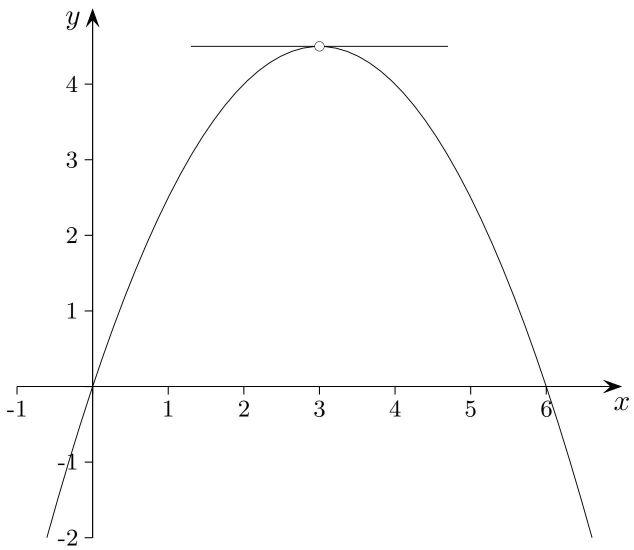
e) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

Differentialrechnung   Anfänge

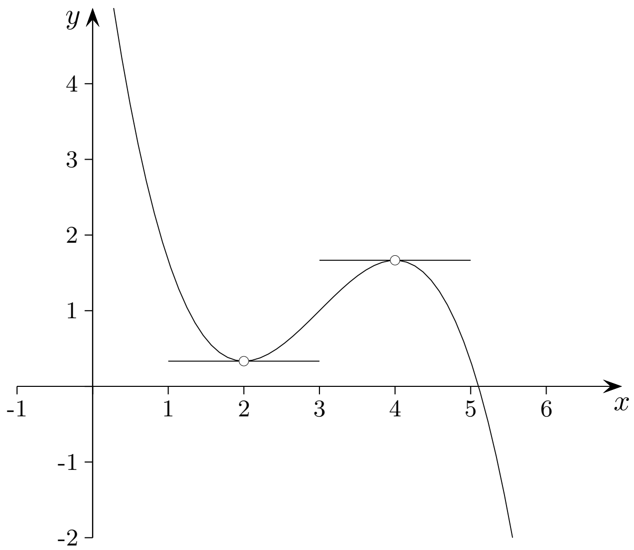
Lösungen:

a)
$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + 3x \\ f'(x) &= -x + 3 \\ 0 &= -x + 3 \\ x &= 3 \qquad\qquad Max(\,3\,|\,4{,}5\,) \end{aligned}$$



b)
$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 7 \\ f'(x) &= -x^2 + 6x - 8 \\ 0 &= -x^2 + 6x - 8 \end{aligned}$$

$x_1 = 4, \quad x_2 = 2, \quad E_1(\,4\,|\,\frac{5}{3}\,), \quad E_2(\,2\,|\,\frac{1}{3}\,)$



c) $E_1(\,0\,|\,8\,), \quad E_2(\,2\,|\,4\,)$

d) $E_1(\,3\,|\,7\,), \quad E_2(\,1\,|\,11\,)$

e) $E_1(\,\frac{3}{2}\,|\,-\frac{27}{2}\,), \quad E_2(\,-\frac{1}{2}\,|\,\frac{5}{2}\,)$

f) $E_1(\,0\,|\,0\,), \quad E_2(\,2\,|\,-\frac{4}{3}\,)$