Aufgaben Differentialrechnung

Differenzialrechnung

Startseite

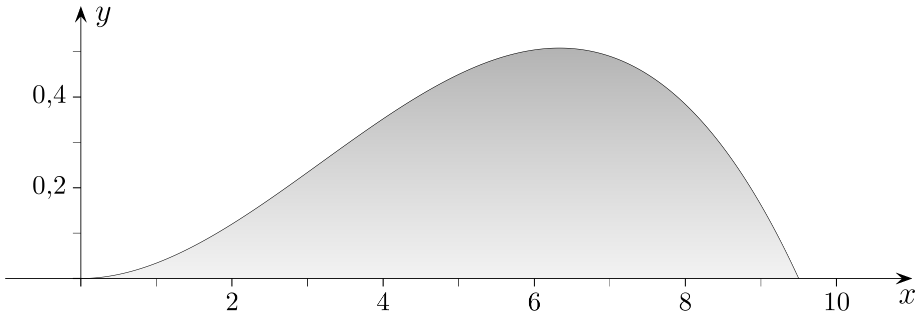
↑ Bergwanderung

Ein Wanderer steigt auf einen Berg, dessen Silhouette durch
$f(x) = 0,038x^2 - 0,004x^3$ gegeben ist (Angaben in km).

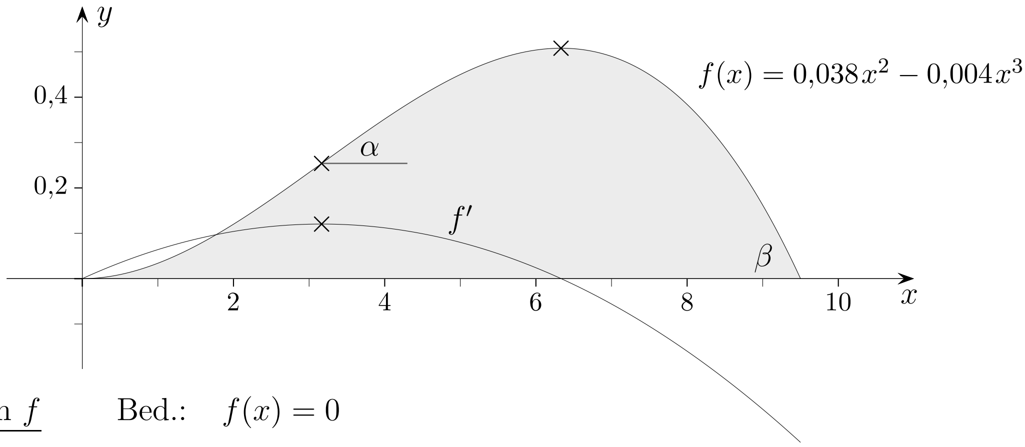
a) Welche Querschnittslänge hat der Berg?

b) Wie hoch ist der Berg?

c) Wie groß ist der Anstieg maximal, wenn der Wanderer von Westen (von Osten) kommt?



$\uparrow$ Bergwanderung



Nullstellen der Funktion f Bed.: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0{,}038x^2 - 0{,}004x^3 \\ 0 &= x^2\,(0{,}038 - 0{,}004x) \end{aligned}$$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2 = 9{,}5$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1\big(0 \mid 0\big)$, $N_2\big(9{,}5 \mid 0\big)$

Maximum der Funktion f notwendige Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}038x^2 - 0{,}004x^3 \\ f'(x) &= 0{,}076x - 0{,}012x^2 \\ 0 &= x\,(0{,}076 - 0{,}012x) \end{aligned}$$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2 = 6{,}333$

$Max\big(6{,}333 \mid 0{,}508\big)$

Maximum der Funktion f' notwendige Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0{,}076x - 0{,}012x^2 \\ f''(x) &= 0{,}076 - 0{,}024x \\ 0 &= 0{,}076 - 0{,}024x \end{aligned}$$

$x = 3{,}166$

Maximum der 1.Ableitung $\big(3{,}166 \mid 0{,}120\big)$, Wendepunkt $\big(3{,}166 \mid 0{,}254\big)$

hier: Übergang von einer Links- in eine Rechtskurve

maximaler Anstieg, Winkel

$\alpha = 6{,}9°$

$f'(9{,}5) = -0{,}361$

$\beta = \arctan\ -0{,}361 = -19{,}8°$ Erläuterungen ...

Variation der Aufgabe:

$f(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}002x^3$

↑ Bergwanderung $\quad f(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}002x^3$

Nullstellen

$N_1\big(0 \mid 0\big), \quad N_2\big(25 \mid 0\big)$

Maximum

$Max\big(16{,}667 \mid 4{,}630\big)$

Wendepunkt

$W\big(8{,}333 \mid 2{,}315\big)$

maximaler Anstieg, Winkel

$\alpha = 22{,}6°$

$\beta = -51{,}3°$

↑ Darmerkrankung

Das Robert-Koch-Institut in Berlin hat den Verlauf der Darmerkrankung EHEC untersucht.
Die Zahl der Erkrankten kann näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung dargestellt werden:

$$f(x) = -\frac{1}{250}x^3 + \frac{1}{10}x^2$$

Die Erfassung der Erkrankten beginnt zum Zeitpunkt $x = 0$, x Zeit in Tagen.
Es wird nur das Intervall betrachtet, auf dem $f(x) \geq 0$ ist.

a) Ermittle, wie viele Personen am zehnten Tag erkrankt sind.

b) Berechne den Tag, an welchem die Epidemie vorbei ist.

c) Berechne den Tag, an dem die meisten Personen erkrankt sind.
Berechne weiter, wie viele Personen an diesem Tag erkrankt sind.

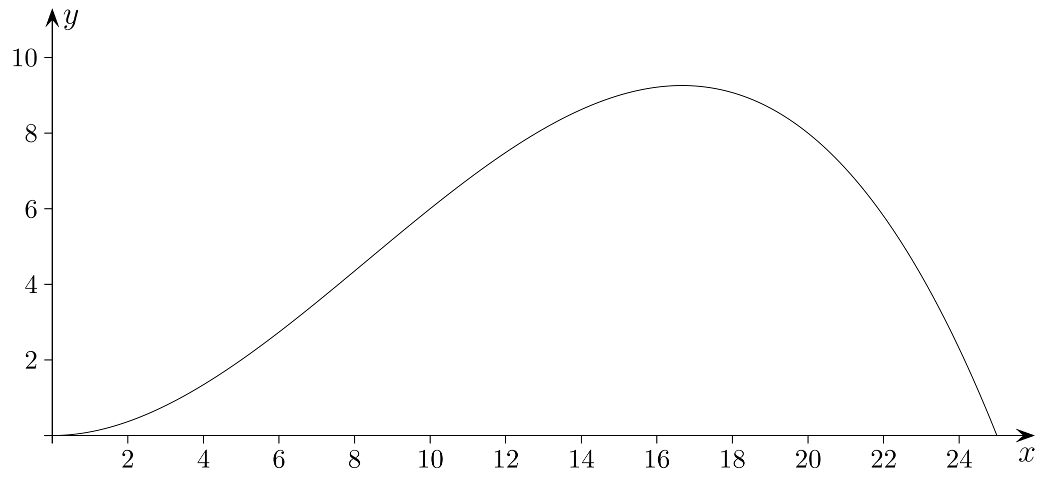
d) Berechne, an welchem Tag sich die Zahl der Erkrankten am stärksten änderte.

e) Ermittle den Zeitpunkt, an welchem noch kurz vor Ende der Epidemie 5 Personen erkrankt waren.

f) Zeichne den grafischen Verlauf der Epidemie.

g) Ermittle, wann die Erkrankungsrate 0,5 Erkrankungen/Tag beträgt.

↑ Darmerkrankung



Das Robert-Koch-Institut in Berlin hat den Verlauf der Darmerkrankung EHEC untersucht.
Die Zahl der Erkrankten kann näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung dargestellt werden:

$$f(x) = -\frac{1}{250}x^3 + \frac{1}{10}x^2$$

Die Erfassung der Erkrankten beginnt zum Zeitpunkt $x = 0$, x Zeit in Tagen.
Es wird nur das Intervall betrachtet, auf dem $f(x) \geq 0$ ist.

a) Ermittle, wie viele Personen am zehnten Tag erkrankt sind. $f(10) = 6$

b) Berechne den Tag, an welchem die Epidemie vorbei ist. $x_N = 25$

c) Berechne den Tag, an dem die meisten Personen erkrankt sind.
Berechne weiter, wie viele Personen an diesem Tag erkrankt sind. $Max\big(16{,}67 \mid 9{,}26\big)$

d) Berechne, an welchem Tag sich die Zahl der Erkrankten am stärksten änderte. $x_W = 8{,}3$

e) Ermittle den Zeitpunkt, an welchem noch kurz vor Ende der Epidemie 5 Personen erkrankt waren. $x_t = 22{,}54$

f) Zeichne den grafischen Verlauf der Epidemie.

g) Ermittle, wann die Erkrankungsrate 0,5 Erkrankungen/Tag beträgt. $x_1 = 3{,}06$
$x_2 = 13{,}60$

↑ Katamaran

Der mittlere Teil des Querschnitts eines Katamarans entspricht der Funktion

$$f(x) = 0{,}2x^4 - 1{,}8x^2$$

$1\,LE = 1\,m$.
Das Deck wird durch die Gerade $y = 1$ erfasst,
Die Wasseroberfläche durch die x-Achse.
Es wird nur das Intervall betrachtet, auf dem $f(x) \leq 1$ ist.

a) Gib das Symmetrieverhalten des Funktionsgraphen an.
Begründe deine Aussage.

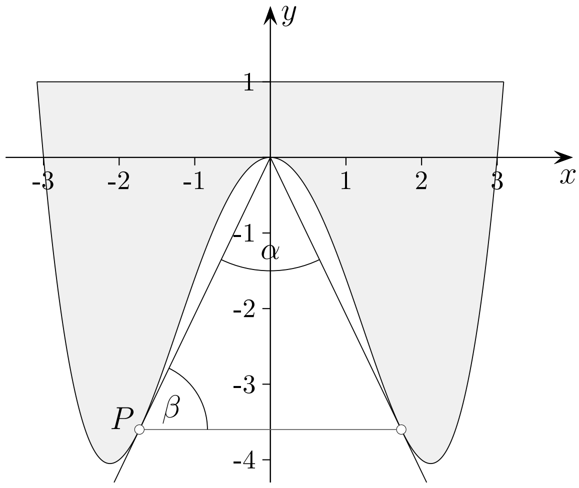
b) Ermittle die Breite des Decks und die Breite des Schiffsrumpfes auf Höhe der Wasseroberfläche.

c) Welchen Tiefgang hat das Schiff?

d) Zeichne den Graphen von f zusammen mit der Decklinie.

e) Im Hochpunkt H des Graphen von f soll für Unterwasserbeobachtungen eine Kamera angebracht werden. Man möchte wissen, wie groß der Blickwinkel der Kamera in Richtung Meeresgrund ist. Hierzu muss man zwei Tangenten durch den Punkt H an den Schiffsrumpf anlegen. Weise nach, dass die Gleichung einer dieser Tangenten $t(x) = 2{,}08x$ lautet.
Berechne den Blickwinkel.

↑ Katamaran



Der mittlere Teil des Querschnitts eines Katamarans entspricht der Funktion

$$f(x) = 0{,}2x^4 - 1{,}8x^2$$

$1\,LE = 1\,m$.
Das Deck wird durch die Gerade $y = 1$ erfasst,
Die Wasseroberfläche durch die x-Achse.
Es wird nur das Intervall betrachtet, auf dem $f(x) \leq 1$ ist.

a) Gib das Symmetrieverhalten des Funktionsgraphen an. Begründe deine Aussage.
achsensymmetrisch zur y-Achse
$f(x) = f(-x)$

b) Ermittle die Breite des Decks und die Breite des Schiffsrumpfes auf Höhe der Wasseroberfläche.
Deck $6{,}172\,m$
Breite des Schiffsrumpfes $6\,m$

c) Welchen Tiefgang hat das Schiff?
$f(2{,}121) = -4{,}05$

d) Zeichne den Graphen von f zusammen mit der Decklinie.

e) Im Hochpunkt H des Graphen von f soll für Unterwasserbeobachtungen eine Kamera angebracht werden. Man möchte wissen, wie groß der Blickwinkel der Kamera in Richtung Meeresgrund ist. Hierzu muss man zwei Tangenten durch den Punkt H an den Schiffsrumpf anlegen. Weise nach, dass die Gleichung einer dieser Tangenten $t(x) = 2{,}08x$ lautet.
Berechne den Blickwinkel.

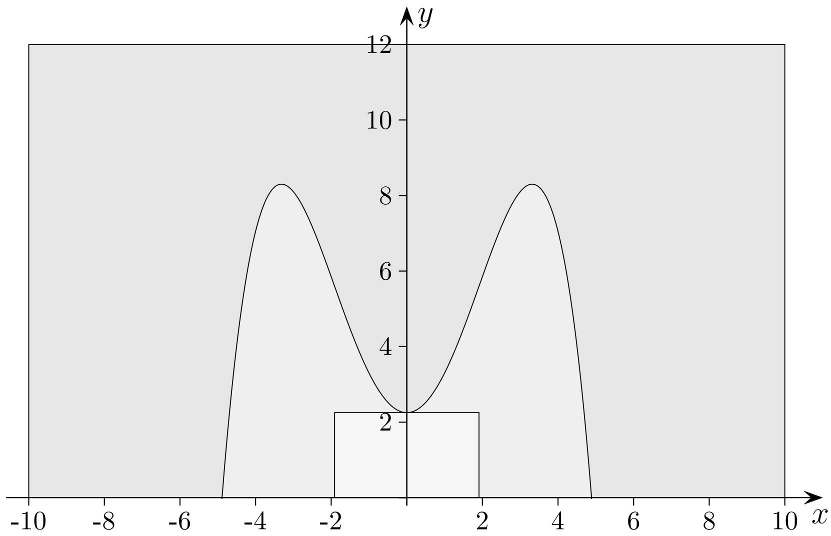
$f'(-1{,}732) = 2{,}08$

$P\big(-1{,}732 \mid -3{,}60\big)$

$\tan\beta = 2{,}08, \ \beta = 64{,}3°$

$\alpha = 51{,}4°$

↑ Museumsfassade



Ein Architekt entwirft eine Museumsfassade.
Die Fassade hat eine Breite von $20\,m$ und eine Höhe von $12\,m$.
Es gibt einen verglasten Bereich, der durch den Graphen der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{11}{10}x^2 + \frac{45}{20}$$

wellenförmig begrenzt wird.

Die Höhe der Eingangstür zum Museum wird durch den Graphen von f begrenzt,
die Breite durch die Wendestellen.

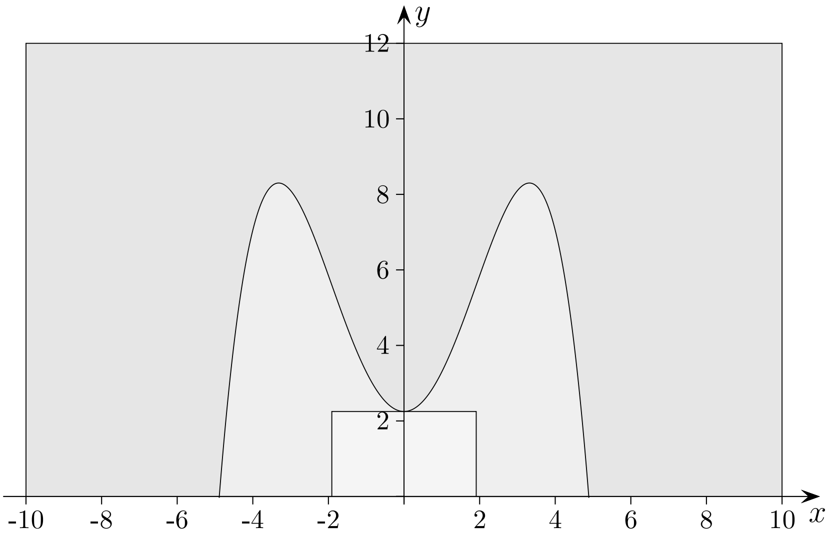
a) Welches Symmetrieverhalten hat die wellenförmige Begrenzung des verglasten Fassadenbereiches? Begründe deine Aussage.

b) Berechne die Breite und die (maximale) Höhe des verglasten Bereichs und die Breite und Höhe der Eingangstür.

c) Schätze den Inhalt der Fassadenfläche, den verglasten Bereich mit Tür ausgenommen.

d) Die Breite des verglasten Bereichs soll geändert werden und nun $10\,m$ betragen.
Um wie viele Meter muss hierzu der Graph der Funktion f nach oben verschoben werden?

↑ Museumsfassade



Ein Architekt entwirft eine Museumsfassade.
Die Fassade hat eine Breite von $20\,m$ und eine Höhe von $12\,m$.
Es gibt einen verglasten Bereich, der durch den Graphen der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{11}{10}x^2 + \frac{45}{20}$$

wellenförmig begrenzt wird.

Die Höhe der Eingangstür zum Museum wird durch den Graphen von f begrenzt,
die Breite durch die Wendestellen.

a) Welches Symmetrieverhalten hat die wellenförmige Begrenzung des verglasten Fassadenbereiches? Begründe deine Aussage.

Graph achsensymmetrisch, $f(x) = f(-x)$

b) Berechne die Breite und die (maximale) Höhe des verglasten Bereichs und die Breite und Höhe der Eingangstür.

Breite des verglasten Bereichs:

Nullstellen, $f(x) = 0, \ldots, u^2 - 22u - 45 = 0$

$u_1 = 23{,}88,\ u_2 = -1{,}88$

$x^2 = 23{,}88 \quad \Longrightarrow \quad x_{1/2} = \pm 4{,}89$

Breite $9{,}78\,m$

Höhe $\quad f(4{,}89) = 8{,}30$

Breite der Eingangstür:

Wendestellen, $f''(x) = 0, \ldots, 3x^2 - 11 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1/2} = \pm 1{,}91$

Türbreite $3{,}82\,m$

Türhöhe $\quad f(0) = \frac{45}{20} = 2{,}25$

c) Schätze den Inhalt der Fassadenfläche, den verglasten Bereich mit Tür ausgenommen.

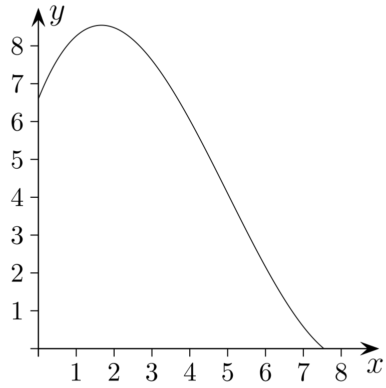
geschickte Aufteilung ergibt $188\,m^2$

d) Die Breite des verglasten Bereichs soll geändert werden und nun $10\,m$ betragen.
Um wie viele Meter muss hierzu der Graph der Funktion f nach oben verschoben werden?

$f(5) = -\frac{3}{2}$, Verschiebung um $b = 1{,}5$

$$f(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{11}{10}x^2 + \frac{15}{4}$$

↑ Medikament



Einem Patienten wird zum Zeitpunkt $x = 0$ eine bestimmte Menge eines Medikaments verabreicht. Die Funktion

$$f(x) = \frac{3}{50}x^3 - \frac{9}{10}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{33}{5} \qquad \text{(Bereich siehe Grafik)}$$

beschreibt die Konzentration dieses Medikaments (Anzahl der Milliliter pro Liter Blut) nach x Stunden.

Ermittle die Ergebnisse mit dem GTR. Schreibe aber die Lösungsidee auf.

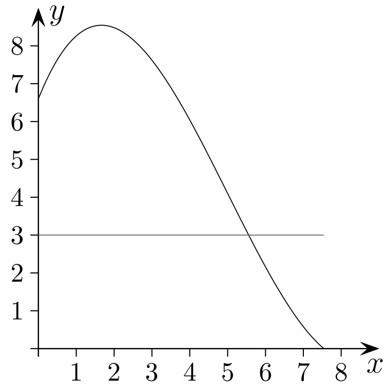
a) Zu welchem Zeitpunkt ist das Medikament gänzlich abgebaut?

b) Zu welchem Zeitpunkt verringert sich die Konzentration dieses Medikaments am stärksten?

c) Der Patient hat 5 Liter Blut.
Wie viele Milliliter des Medikaments hat der Patient nach 2 Stunden im Körper?

d) Das Medikament ist nur wirksam, wenn mindestens 15 Milliliter des Medikaments sich im Körper befinden. In welchem Zeitraum ist das der Fall?

↑ Medikament



Einem Patienten wird zum Zeitpunkt $x = 0$ eine bestimmte Menge eines Medikaments verabreicht. Die Funktion

$$f(x) = \frac{3}{50}x^3 - \frac{9}{10}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{33}{5} \qquad \text{(Bereich siehe Grafik)}$$

beschreibt die Konzentration dieses Medikaments (Anzahl der Milliliter pro Liter Blut) nach x Stunden.

Ermittle die Ergebnisse mit dem GTR. Schreibe aber die Lösungsidee auf.

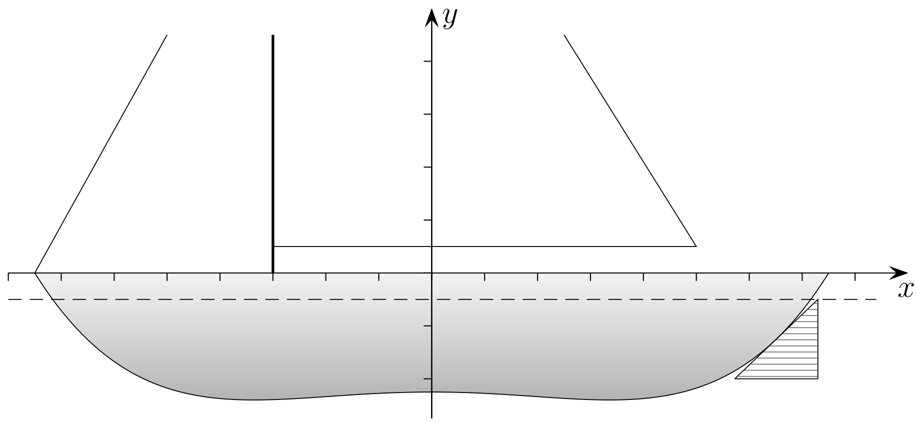
a) Zu welchem Zeitpunkt ist das Medikament gänzlich abgebaut? $x = 7{,}5$

b) Zu welchem Zeitpunkt verringert sich die Konzentration dieses Medikaments am stärksten? $x = 5$

c) Der Patient hat 5 Liter Blut.
Wie viele Milliliter des Medikaments hat der Patient nach 2 Stunden im Körper? $42{,}4\,ml$

d) Das Medikament ist nur wirksam, wenn mindestens 15 Milliliter des Medikaments sich im Körper befinden. In welchem Zeitraum ist das der Fall? $0 \le x \le 5{,}6$

↑ Schiffsrumpf



Ein Schiffskonstrukteur stellt für die Seitenansicht einer Jacht die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{6750}x^4 - \frac{1}{75}x^2 - \frac{9}{2} \qquad \text{auf.}$$

$1\,LE = 1\,m$.
Das Deck wird durch die x-Achse erfasst, die Wasserlinie durch die Gerade $y = -1$.
Es wird nur das Intervall betrachtet, auf dem $f(x) \leq 0$ ist.

a) Gib das Symmetrieverhalten des Funktionsgraphen an.
Ermittle die Länge des Schiffes.

b) Zeichne den Graphen von f zusammen mit der Deck- und Wasserlinie.

c) Bestimme den maximalen Tiefgang.

d) Schätze den Flächeninhalt der Seitenansicht des Schiffes.

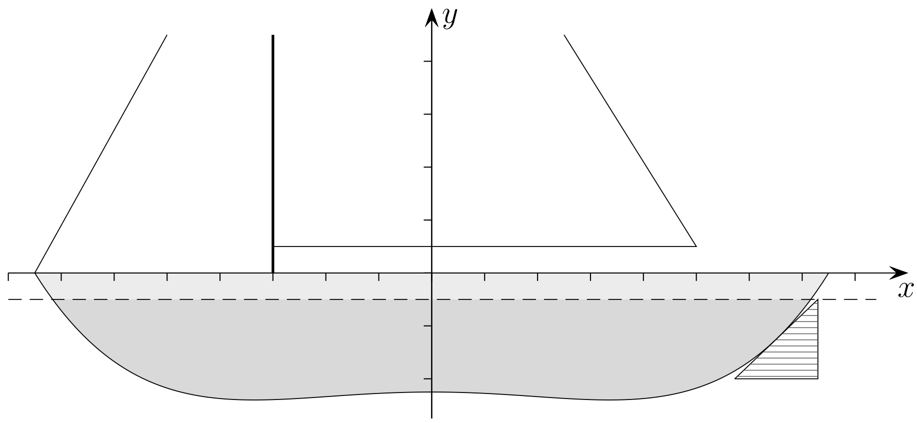
e) Im Punkt $P\big(13 \mid f(13)\big)$ wird ein Ruderblatt in Form eines rechtwinkligen Dreiecks befestigt. Die Hypotenuse des Dreiecks soll dabei tangential zum Rumpf verlaufen, d. h. den Rumpf im angegebenen Befestigungspunkt berühren, und soll genau bis zur Wasserlinie reichen.
Das Ruderblatt ist $3\,m$ hoch. Berechne die Fläche der Seitenansicht.

f) Die maximale Geschwindigkeit, die ein Schiff der obigen Bauart durch Windkraft erreichen kann, hängt von der Länge des Schiffes entlang der Wasserlinie ab.
Eine Faustformel zur Berechnung der maximalen Geschwindigkeit v in km/h lautet

$$v = 4{,}5 \cdot \sqrt{\text{Länge des Schiffes in } m \text{ entlang der Wasserlinie}}$$

Berechne, wie schnell die Jacht der obigen Konstruktion maximal sein kann und wie lange sie auf einer Regattastrecke von 500 Seemeilen mindestens unterwegs sein wird
(1 Seemeile $\approx 1852\,m$).

↑ Schiffsrumpf Ergebnisse



Ein Schiffskonstrukteur stellt für die Seitenansicht einer Jacht die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{6750}x^4 - \frac{1}{75}x^2 - \frac{9}{2} \qquad \text{auf.}$$

$1\,LE = 1\,m$.
Das Deck wird durch die x-Achse erfasst, die Wasserlinie durch die Gerade $y = -1$.
Es wird nur das Intervall betrachtet, auf dem $f(x) \leq 0$ ist.

a) Gib das Symmetrieverhalten des Funktionsgraphen an. achsensymmetrisch, $f(x) = f(-x)$
Ermittle die Länge des Schiffes. $30\,m$

b) Zeichne den Graphen von f zusammen mit der Deck- und Wasserlinie.

c) Bestimme den maximalen Tiefgang. $3{,}8\,m$ an den Stellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{45}$

d) Schätze den Flächeninhalt der Seitenansicht des Schiffes. $120\,m^2$

e) Im Punkt $P\big(13 \mid f(13)\big)$ wird ein Ruderblatt in Form eines rechtwinkligen Dreiecks befestigt. Die Hypotenuse des Dreiecks soll dabei tangential zum Rumpf verlaufen, d. h. den Rumpf im angegebenen Befestigungspunkt berühren, und soll genau bis zur Wasserlinie reichen.
Das Ruderblatt ist $3\,m$ hoch. Berechne die Fläche der Seitenansicht. $4{,}7\,m^2$

f) Die maximale Geschwindigkeit, die ein Schiff der obigen Bauart durch Windkraft erreichen kann, hängt von der Länge des Schiffes entlang der Wasserlinie ab.
Eine Faustformel zur Berechnung der maximalen Geschwindigkeit v in km/h lautet

$$v = 4{,}5 \cdot \sqrt{\text{Länge des Schiffes in } m \text{ entlang der Wasserlinie}}$$

Berechne, wie schnell die Jacht der obigen Konstruktion maximal sein kann und wie lange sie auf einer Regattastrecke von 500 Seemeilen mindestens unterwegs sein wird
(1 Seemeile $\approx 1852\,m$). $2 \cdot 14{,}32\,m = 28{,}64\,m$, $v_{\text{max}} = 24{,}08$, $t = 38{,}4$ Stunden

Differenzialrechnung

Startseite